Communication

à

EM 2000

Grenoble, 15-17 JUILLET 2000

SYMBOLISME MATHEMATIQUE

DANS UN ENVIRONNEMENT LINGUISTIQUE

NI LATINOGRAPHIQUE NI ECRIT DE GAUCHE A DROITE

Abdelkader KHELLADI

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumedienne
Institut de Mathématiques, B.P 32, El Alia, 16111, Alger
e-mail: kader_khelladi@yahoo.fr

1. INTRODUCTION

A. Le Constat:

1) La mondialisation déjà ancienne de la science en général et des mathématiques en particulier véhicule des symboles de mathématiques dont les origines sont diverses du point de vue du développement historico-culturel de la pensée mathématique.

2) La prise en charge récente de l'enseignement des mathématiques dans des pays qui ont recouvré leurs indépendances à la moitié du siècle écoulé a introduit un enseignement dans des langues qui ne sont pas latinographiques et qui ne s'écrivent pas de guauche à droite.

3) La langue arabe en est un exemple concret et important puisque certains pays ont opté pour en enseignement des mathématiques dans cette langue. Dans certains cas, cette "arabistion" de l'enseignement a introduit, de manière non concertée, une adaptation de la symbolique mathématique dont les conséquences ne sont pas toujopurs bien analysées.

4) Intérêt particulier à l'expérience de l4ecole Fondamentale en Algérie.

5) Approche ici plus pratique et même souvent empirique que fondée sur une théorie ou des expériences menées rationnellement.

6) L’exposé, qui doit être considéré comme un essai de “didactique naïve”, devra surtout provoquer et, pourquoi pas, aboutir à proposer les bases d’un débat et engager une réflexion méthodologique commune sur ce thème, en proposant quelques hypothèses, données comme “à priori” par l’auteur.

B. Le problème:

1) L'idée de perfection logique a de tous temps été une préoccupation importante pour tous les mathématiciens intéressés aux fondements et au développement des mathématiques. Cette idée est exprimée à travers trois étapes d'un processus décrit par Roger GODEMENT [2] comme

a) construire des ***objets mathématiques***;

b) former des ***relations*** entre des objets mathématiques;

c) démontrer que certaines relations entre des objets mathématiques sont ***vraies (théorèmes)*** .

Il parait raisonnable d'avancer l'hypothèse que ce sont ces trois étapes de l'activité en mathématiques, liées à l'idée de perfection logique, qui ont amené, selon une évolution historique (qu'il serait utile et même nécessaire de clarifier un jour) l'introduction du symbolisme mathématique.

2) L'usage de ce symbolisme est établi depuis longtemps, avec des développements distincts selon les lieux et les époques où ce symbolisme est apparu. C'est ainsi que des signes, qui seront plus tard des symboles (par exemple la notation pour la racine carrée ou la notion de représentation générique d'une variable) sont introduits par des mathématiciens arabes (du Maghreb semble-t-il) traitant des équations du second degré et utilisés, plus tard, par d'autres mathématiciens dans le monde, tels quels ou avec des variantes qui, de toutes les manières, n'ont jamais fait oublier les origines.
`

Un autre exemple important est constitué par les symboles utilisés par différents mathématiciens travaillant dans des cadres culturels différents pour représenter ces premiers symboles mathématiques que sont les nombres entiers naturels. Les Arabes ont utilisé une notation devenue aujourd'hui universelle, alors que celle introduite en Inde est d'usage limité et que d'autres n'ont conservé, dans la mémoire humaine, qu'un caractère historique.

Néanmoins, et sans s'attarder plus longtemps sur les aspects historiques que l'auteur ne maîtrise pas, l'expansion et la croissance des communications dans le monde a imposé, petit à petit et en particulier aux mathématiciens, l'idée fondamentale de ***symbolisme universel des mathématiques***, transgressant ainsi les écueils dus aux véhicules, langues ou autres, utilisés pour cette communication. Par un processus d'échanges entre civilisations tout au long de l'histoire, il était devenu vital pour chaque mathématicien, quel que fut son installation géographique, d’accéder rapidement et surtout sans ambiguïté aux travaux d’autres mathématiciens et d’en assimiler les développements, essentiellement nouveaux. Faut-il réellement insister sur la nécessité, pour le mathématicien, d’être au courant, surtout aujourd'hui que le monde est réellement devenu un village planétaire, des travaux réalisés par d’autres mathématiciens, aussi éloignés fussent-ils géographiquement?

3) Il est certain que quelques usages locaux peuvent remettre en cause cette universalité du symbolisme, d’une part pour des raisons culturelles et d’autre part parce qu’il n’y a pas eu de rencontre internationale pour mettre en place une symbolique mathématique unique et qui en aurait confirmé cet aspect universel. Néanmoins, aujourd’hui que les communications entre aires culturelles différentes ont gagné en volume et en pertinence et qu’elles ont acquis des facilités techniques de réalisation (courrier électronique par exemple) il semble important que la symbolique des mathématiques soit unifiée et puisse, enfin, acquérir ce caractère universel.

Il semble admis par presque tout le monde que

a) l’enseignement et l’apprentissage des mathématiques, considérées comme outil universel, ne devrait pas souffrir des considérations particulières surtout à cause (ou grâce à, selon le point de vue) de son symbolisme universellement admis;

b) l’usage du symbolisme facilite la clarté des concepts, la communication et l’accès à la production mathématique universelle au prix d’un effort, autre que mathématique, minimum.

II. TYPES DE SYMBOLES

Rappelons la définition du terme “***symbole***” tel que donnée dans le Petit Larousse Illustré.

“Symbole: (du grec *sumbolon* , signe) **1.** Signe figuratif, être animé ou chose, qui représente un concept, qui en est l’image, l’attribut, l'emblème. *Le drapeau, symbole de la patrie. La balance, symbole de la justice.* **2.** Tout signe conventionnel abréviatif. **3. CHIM.** lettre ou groupe de lettres servant à désigner les éléments. **4. MATH.** Signe graphique figurant un objet mathématique ou une opération logique”.

On peut donc retenir comme **symbole mathématique** tout **signe figuratif**

conventionnel et abréviatif d'un objet ou d'une opération mathématique.

Cette définition, même si elle n'est peut être pas celle sur laquelle il y a unanimité, constitue néanmoins une base admise par un grand nombre de mathématiciens. Elle propose trois qualificatifs de la notion de symbole mathématique qui sont examinés plus attentivement comme suit:

- **figuratif:** ce qui signifie qu'un symbole mathématique est une figure ou un schéma au sens intuitif du terme, comme le sont, par exemple, les lettres d'un alphabet ou l'écriture des nombres entiers naturels au moyen des chiffres arabes; il faut inclure dans ce qualificatif toutes les figures courantes des mathématiques (l'auteur est convaincu que ces objets sont une représentation symbolique car ils vérifient la définition ci-dessus) comme les ensembles classiques, les vecteurs, les courbes planes, les fonctions classiques de l'Analyse, les graphes de fonctions, etc.....;

- **conventionnel:** ce qui signifie que l'usage d'un symbole mathématique donné s'est imposé par convention, évidemment établie quelque part dans le temps et l'espace par au moins un mathématicien, dont la pratique a fini par s'imposer à tous, par l'étendue et la qualité de travaux qui conquièrent ainsi un statut de connaissance universelle pour toute la communauté mathématique, ou même pour d'autres raisons "politiques" concrètes (affrontements culturels, expansions coloniales, etc.....);

- **abréviatif:** ce qui signifie que l'usage du symbole mathématique constitue aussi une abréviation d'un objet mathématique bien défini et surtout unique, dont le symbole "résume" toutes les propriétés et permet même de suggérer celles qui sont cachées, en relation avec d'autres objets mathématiques, supposés évidemment eux aussi bien définis. Il faut noter que ce qualificatif a des conséquences pédagogiques puisque c'est grâce à cette propriété du symbole que l'on peut, par exemple, "oser" des présentations, dites formelles lors de l'apprentissage, de concepts dont la définition précise et complète serait lourde, longue et difficile à manier, à comprendre et à utiliser, dans une première étape.

Cette définition a aussi pour conséquence une **typologie du symbolisme mathématique** que l'on peut présenter sous les trois types suivants, qu'il faut d'ailleurs relier avec les trois étapes de l'activité mathématique données au début.

1) Symboles du Type Concept: Ce sont les symboles figurant des concepts de base des mathématiques, essentiellement liés à l'utilisation de la Théorie des Ensembles. Ils représentent les opérations et les relations définies dans ce cadre et dont les plus connues sont:

et pour le symbole de l'**appartenance** et le symbole de **sa négation**; il faut aussi noter que ce symbole peut aussi être utilisé dans un version inversée, à savoir ';

∩ pour le symbole de l'**intersection**;

pour le symbole de l'**union**;

pour le symbole de l'**inclusion** ensembliste au sens large;

pour le symbole de l'inclusion ensembliste au sens strict; il faut noter qu'il est admis d'utiliser ce symbole en version inversée, comme d'ailleurs celui qui précède, et représentée comme

2) Symboles du Type Logique: Ce sont les symboles de la logique mathématique et du raisonnement. Les plus connus sont les symboles d'implication, d'équivalence logique. Leurs figures ont les formes suivantes

pour le symbole de l'**implication** (ou inférence, ou déduction) logique, il faut noter que l'usage du symbole en sens inverse est bien défini, sans ambiguïté et admis conventionnellement par tous les mathématiciens;

$\Leftrightarrow$ pour le symbole d'**équivalence logique** et dont l'usage est bien défini.

Donnons d'autres exemples, classiques et pour la définition desquels on renvoie vers les ouvrages de mathématiques

pour le symbole du **quantificateur existentiel**;

pour le symbole du **quantificateur universel**;

pour le symbole de la **conjonction** logique;

pour le symbole de la **disjonction** logique;

3) Symboles du Type Contenu: Dans ce type de symboles, on peut noter deux grandes classes:

la première étant constituée des représentations symboles des ensembles classiques des mathématiques, (qui ne sont pas identiques d'un pays à un autre, précisément par l'usage de langues ni latinographique ni écrites de droite à gauche) et des opérations classiques sur ces ensembles;

+ et **-** pour les symboles de l'**addition** et de la **soustraction**. Il faut noter ici que la cohérence entre l’usage universel du symbole de la soustraction, qui est une opération non commutative, et l’exigence des langues écrites de droite à gauche peut poser un problème de communication, lorsque les règles de lecture ne sont pas précisées (ou ne sont pas connues du lecteur ou même oubliées au moment de la lecture). A ma connaissance, pour n’importe quel mathématicien dans le monde, l’expression

$$4 - 5$$

est égale à -1, alors que dans les ouvrages du primaire et du secondaire de l'École Algérienne, privilégiant la logique de l’écriture de la langue, elle vaut +1. Ce n’est plus le cas à l’université, même dans les sections dites arabisées et où l’usage classique est mis en place.

$\sum$ et $\int$ pour les symboles de **sommation** et de l’opérateur **intégration** (sans que ne soit spécifié ici le type précis d’intégration) qui eux aussi sont inversés dans les enseignements de fin de cycle du secondaire algérien, mais pas dans les enseignements du supérieur.

$=$, , $\neq$ et $<$, $>$ pour les symboles des opérateurs “**égalité**”, “**isomorphe**” et “**différent**”, qui eux ne posent pas de problèmes dans leur utilisation dans l’ensemble des programmes algériens parce **que leur graphisme est symétrique**, alors que celui de ”**inférieur au sens strict**” et celui de ”**supérieur au sens strict**”, malgré le fait qu’ils soient associés à des opérations non commutatives, ne posent pas non plus de problème de cohérence car les graphismes qui les représentent sont dissymétriques en tant que figures.

la seconde classe étant formée de tous les objets utilisés pour représenter soit des problématiques soit des cas particuliers. Quelques exemples sont donnés ci-dessous.

Pour des exemples de la seconde sous-classe, il est rappelé que leur signification en tant que symboles n’est pas admise par tout le monde, mais que l’auteur considère qu’ils satisfont bien la définition retenue précédemment pour la notion de symbole (contrairement à l’opinion développée par certaines Écoles, voir l’ouvrage [1] de Lucienne FELIX et l’annexe du présent travail).

Les objets mathématiques suivants, bien connus et surtout utilisés par tout le monde, en constituent un échantillon: la **droite réelle**, les **intervalles**, le t**ableau de variation d’une fonction numérique**, les **axes de coordonnées** servant de repère du plan, les **courbes** tracées sur le plan etc.....

De nombreux autres symboles sont introduits mais l'auteur ne se propose pas d'en faire une examen de manière exhaustive ici.

III. RELATION ENTRE SYMBOLES ET LANGUE D'ENSEIGNEMENT

Il faut noter d'emblée que la mise en œuvre des programmes, concrètement dans une aire culturelle donnée, est largement influencée par la langue naturelle, comme cela a été démontrée et analysé dans la thèse de Colette LABORDE, mais aussi par la typographie de laz langue elle même.

Il me paraît raisonnable, en situation d'apprentissage et de relation apprenant-appreneur, de rappeler, particulièrement pour l'enseignement des mathématiques, que les objectifs fondamentaux doivent s'atteler à:

a) définir aussi clairement que possible les objectifs du programme;
b) s'assurer d'un minimum de logique (ou de non contradiction tout au moins) dans les signes figurant particulièrement des symboles qui représentent des concepts liés entre eux;
c) tenir compte de l'universalité de la symbolique des mathématiques, considérée comme un consensus;
d) identifier et minimiser les opérations cognitives que doit mener l'apprenant pour assimiler et utiliser les concepts introduits;

La condition **a)** paraît naturelle, mais recèle néanmoins des difficultés cachées que seules des études de didactique appuyées et confirmées par l'expérience peuvent lever.

C'est le cas **b)** où la typographie de la langue et la représentation géométrique symbolique de la **droite numérique** et des **intervalles** dans les ouvrages de mathématiques de 9ème année, distribués aux élèves de fin du cycle moyen, (en pages 250 et suivantes) est un exemple. En effet, dans ce cas, le tracé de la droite comme un “bout de trait terminé par une pointe de flèche” ne possède pas d'origine et les intervalles, qui sont supposés représenter des sous-ensembles de la droite, ne bénéficient pas du même sens d'orientation que cette dernière. La droite est orientée de gauche à droite alors que les intervalles sont représentés avec une orientation implicite de droite à gauche, car les lettres utilisées pour en définir les extrémités sont des lettres de l'alphabet arabe; les initiateurs ont

considérés, naturellement, que l'extémité de plus petite valeur doit être à droite et l'extrémité de plus grande valeur doit être à gauche. A travers cet exemple un problème de choix (ou de décision) se pose.
En vertu du principe **b)** il faut soit réorienter la droite numérique de la droite vers la gauche, soit de réorienter les intervalles de la gauche vers la droite pour que **la représentation symbolique (au sens large que j'ai introduite plus haut) d'un sous-ensemble de la droite réelle ait la même orientation qque celui de la droite elle même**.
Il est clair que le choix n’est ni simple ni facile s’il doit tenir compte simultanément et globalement de l’usage universel de la symbolique mathématique et d’un contenu culturel lié à l’écriture de la langue.

On rejoint aussi, dans le cas **c)** à travers les ouvrages de fin du cycle secondaire en Algérie, où par exemple les signes figurant les opérations de l'**“Intégration”**, de “**Sommation (grand sigma)**” sont inversés alors que, contrairement aux cas signalés plus haut où cette inversion est admise, cette représentation inversée n’est pas utilisée dans tous les pays arabes qui ont choisi d’arabiser les enseignements de mathématiques.

La représentation des **fonctions classiques de l’Analyse Mathématique** peut aussi être placée dans ce type posés par le principe **c)** où l’usage des symboles universellement reconnus, même dans les pays de langue non latinographique, n’est pas respecté. Il ne s’agit pas de la **place de l’opérateur** de la fonction à droite ou à gauche de la variable (la notation dite polonaise, quoique peut utilisée, met l’opérateur de la fonction à droite de la variable dans l’écriture latinographique) mais des **"symboles représentant les fonctions usuelles"** eux mêmes. Les ouvrages de certains autres pays tiennent compte de cette universalité et utilisent les symboles reconnaissables par tous les mathématiciens professionnels dans le monde. Il s’agit, à titre d’exemples, de pays où la langue de travail n’est pas à caractères latinographiques, comme par exemple le Maroc, le Japon, La Chine, etc......

Les exemples qui illustrent le cas **d)** sont tirés aussi, comme annoncé tout à fait au début, des ouvrages du cycle secondaire en Algérie. L’exemple type est celui du **choix de l’orientation** de la figure représentant la droite réelle et de ses implications sur l’établissement du **tableau de variations** d’une fonction numérique de la variable réelle, qui lui aussi **doit être considéré comme un symbole mathématique** (selon la définition étendue que j'ai proposée auparavant). Comme l’orientation du plan dans lequel est représenté le graphe

de la fonction étudiée (**graphe qui doit être considéré comme un symbole mathématique, selon l'opinion de l'auteur**) est l'orientation dite canonique, l'apprenant doit utiliser un tableau de variations où la variable est sur **un axe orienté de la droite vers la gauche** et un plan de représentation du graphe où cette **même variable** est **sur un axe orienté de la gauche vers la droite**. Si on admet que le tableau de variations véhicule une "fonction pédagogique" à savoir donner une première image du tracé global de la courbe, l'apprenant doit obligatoirement **faire une symétrie supplémentaire dans sa tête** pour représenter correctement la graphe de la fonction dans le plan.
Quels que soient les objectifs du programme, cette symétrie, obligatoire mais injustifiée (ou tout au moins dont le rôle n'est pas explicité) dans le processus cognitif, prouve que ni l'identification ni la minimisation les opérations cognitives que doit mener l'apprenant pour assimiler et utiliser les concepts introduits ne sont assurées.

IV. CONCLUSION

Ces considérations sur le symbolisme, même si elles sont critiques sans être étayées par une étude complète et rigoureuse, doivent mener à un questionnement sur au moins les deux points suivants.

a) le rôle du symbolisme: Les quelques réflexions présentées plus haut, montrent que l'usage de symboles doit aider à clarifier, comprendre et représenter des concepts et faciliter le raisonnement, soit en vue de l'apprentissage par l'"intuition" soit pour la représentation d'objets concrets (objets géométriques que l'on retrouve dans les plans, les dessins, etc.....).
Un autre rôle, important de la symbolique mathématique, est de faire une distinction nette entre le texte explicatif, écrit sous forme littéraire au moyen de la langue courante en usage, et le contenu purement mathématique. N'est-ce pas pourquoi dit-on "qu'il ne faut pas débuter une phrase avec un symbole". Cette remarque suppose, l'auteur en est conscient, un choix qui particularise le discours mathématique dans le discours général, quoique les mathématiques possèdent également un caractère culturel, qui les plonge dans le discours général, souvent à caractère universel, même si ce non dit est un des objectifs de toute culture. La relation du symbolisme avec l'apport de la langue naturelle dans l'apprentissage des mathématiques qui a été mis en évidence dans les travaux de C. LABORDE [3], n'est pas pris en compte dans ce travail.

b) La mise en place d’une symbolique qui doit être définie et utilisée sans ambiguïté, doit aider à l’apprentissage en minimisant les opérations cachées que doit mener l’apprenant pour manier les concepts. La mise en oeuvre de cette symbolique peut impliquer des "conflits" précisément par la typographie d'une langue qui n'est latinographique ni écrite de gauche à droite.

Par exemple, pour montrer sur un cas précis que des solutions existent, le problème du tableau de variation est revisité. Il est possible de proposer une solution pour ce cas sans que, il va de soi, remettre en cause l’usage de la langue arabe qui n’est ni latinographique ni écrite de gauche à droite. Il suffirait “simplement” de garder les orientations conventionnelles des axes de la variable tel que décrit plus haut, mais d’inverser dans le tableau le sens de moins l’infini vers plus l’infini en le remettant de la gauche vers la droite, en gardant toutes les écritures comme exigé par la logique et la cohérence de la langue, en particulier la colonne où se trouvent variable, fonction et fonction dérivée étant la première colonne de droite du tableau.
Seul un objectif clairement défini, qui peut introduire une solution culturelle, peut lever les ambiguïtés

J’espère que les questionnements et hypothèses de ce travail ont convaincu de la difficulté du processus cognitif des mathématiques, surtout dans des aires où la langue n'est ni latinographique ni écrite de gauche à droite.
Doit-on s'inscrire dans l'universalité ou dans la mondialisation? Le choix n'est pas simple car le monde évolue vers de grands ensembles, dont les objectifs cachés sont souvent d'exclure les plus faibles par des réglementations contraignantes et les poussent à un retour, pas toujours heureux, vers les solutions les plus faciles.

Annexe

Dans l’ouvrage de Lucienne FELIX [1], page 275, on lit: ”L’objet d’une étude géométrique est une situation trop riche pour que l’on puisse expliciter toutes les propriétés qui sont les hypothèses. A chaque instant, il faut choisir celles qui offrent des combinaisons déjà expérimentées comme conduisant à des conclusions connues et utiles. Au lieu du symbolisme d’un système d’équations à transformer, l’on utilise des schémas plus ou moins complexes ou chaque inférence suppose de nombreuses opérations algébriques faites une fois pour toute dans la théorie. Chacune de ces inférences se nomme un ***théorème*** ; c’est en quelque sorte une pierre taillée à l’avance prête à servir à la construction de l’édifice.”; ce qui confirme la propriété du symbolisme de simplifier et clarifier les concepts.

L’auteur ajoute en page 276: ”Des figures effectivement dessinées ne sont indispensables que pour des cas particuliers à observer des yeux. Nous n’étudierons que des sous-ensembles très généraux doués de structures simples, d’où l'absence de dessins.”; ce qui semble nier le rôle symbolique des figures en géométrie en particulier, mais l’auteur s’empresse d’ajouter dans la même page, reconnaissant ainsi implicitement que les figures ont aussi un rôle symbolique: ”Le lecteur aura pourtant très souvent intérêt à tracer quelques esquisses pour suivre les notations.”

REFERENCES

[1] FELIX L. (1962) : *Exposé Moderne des Mathématiques Élémentaires*, DUNOD Eds. Paris

[2] GODEMENT R. (1966) : *Cours d’Algèbre*, HERMANN Eds. Paris

[3] LABORDE C. (1982) : *Langue naturelle et écriture symbolique: deux codes en interaction dans l’enseignement des mathématiques*, thèse de doctorat d’état, Grenoble