

Les deux ateliers proposés par Marc Legrand reposent sur

Le "Débat Scientifique" en cours de mathématiques

Principe

Le principe du débat scientifique est de faire passer l'élève ou l'étudiant (souvent assez scientifiquement passif en cours ou en TD) de la position d'auditeur d'assertions impersonnelles et réputées vraies (les définitions, théorèmes et démonstrations du professeur) à la position d'auteur d'énoncés problématiques (les conjectures et les propositions de preuves). On part ici du principe que ces conjectures et ces propositions de preuves, l'étudiant ne peut les effectuer s'il ne cherche au préalable à se faire une opinion personnelle sur ce qui est scientifiquement raisonnable et sur ce qui ne l'est pas.

Au lieu de se sentir obligé de s'adresser au professeur de façon orthodoxe sous la forme "j'ai appris que..., j'ai lu dans un livre que... , on m'a enseigné que... et par suite, j'affirme que ... mais je ne porte pas personnellement la responsabilité de ce que j'avance", l'étudiant qui veut participer au débat scientifique organisé par le professeur est invité à prendre la parole en s'adressant directement à ses pairs de la façon quelque peu iconoclaste suivante : "Moi, je pense que telle idée est valide..., que tel raisonnement prouve ou contredit une idée soutenue par moi ou par un pair..., et voilà mes raisons..."

Dans le contrat du "débat scientifique", personne ne prétend que les conjectures transcrites au tableau par le professeur sont des théorèmes, ni que les preuves proposées sont valides. Dans un premier temps, personne ne demande au professeur de trancher sur la vérité ou la pertinence des propos ; le rôle de ce dernier est de faciliter l'expression des idées et de permettre aux oppositions de se manifester avec clarté.

Au cours du débat chacun doit donc défendre ses idées avec ténacité tant qu'elles lui semblent plus raisonnables que les explications concurrentes ou contradictoires, et (contrairement au débat polémique) les abandonner, en disant pour quelles raisons, quand il a été persuadé du contraire.

Dans ce "débat d'idées et d'explications", chacun sait qu'il gagne non pas principalement si le débat lui donne raison, mais plutôt si l'explicitation des convictions des uns et des autres l'éclaire et éclaire les autres, fait avancer le groupe dans la compréhension profonde de la situation.

Dans ce débat, le professeur se porte garant de la scientificité globale du débat mais non de la vérité ou de la pertinence des arguments et résultats proposés au fur et à mesure. C'est à la fin seulement qu'il institutionnalise les résultats vrais et conformes (les définitions et théorèmes du cours), qu'il identifie les résultats faux quoique bien séduisants (les erreurs récurrentes contre lesquelles il faudra continuer à se battre), qu'il met en exergue les procédures qui ont été productrices d'idées ou qui ont permis de séparer le vrai du faux (le "métier" de scientifique).

Atelier : Circuit ou les règles du débat mathématique

Le "débat scientifique" est exploité ici pour s'attaquer au difficile problème de la ressemblance et de la différence entre la logique exploitée en mathématiques et les logiques exploitées dans d'autres domaines, notamment dans la vie quotidienne.

L'activité commence par la question :

En quelques mots...

Quelles sont les idées qui vous viennent immédiatement à l'esprit quand vous pensez aux mathématiques ? aux mathématiciens ?

Après 5 minutes de réflexion personnelle, chacun exprime son point de vue. En général la palette des représentations est assez large, allant de l'horreur, de l'enfermement et du sentiment que les mathématiciens font tout pour ne pas communiquer ou pour ne pas permettre aux autres de rentrer dans leur univers, au sentiment de liberté, de bonheur, de créativité et d'esthétisme qu'éprouvent les élus qui pensent avoir franchi la porte du paradis, en passant par ceux qui pensent que cette discipline est totalement dénaturée par son usage à des fins sélectives. L'institutionnalisation proposée ci-dessous est conçue pour être proposée à un amphithéâtre d'étudiants de première année scientifique.

Epistémologie vient du grec épistémé (science), logos (discours, étude ...).

Etre épistémologue à propos d'une activité : c'est porter un regard critique sur les principes de base, les méthodes d'investigation et les résultats de cette activité. C'est aussi se poser la question : qui suis-je quand je pratique cette activité ?

Nos épistémologies propres sont les réponses que nous avons apportées au fil des années aux questions suivantes :

- *pourquoi... j'aime faire ceci ?... je déteste cela ?*
- *qu'est-ce qui est important ? "utile" ?*
- *qu'est-ce qui est valide, légitime ? quel rapport avec "la réalité" ?*
- *qu'est-ce que je comprends réellement ? qu'est-ce qui reste obscur,... douteux ?*

Deux épistémologies extrêmes s'opposent autour des mathématiques :

- **une vision utilitariste** : les maths ne seraient que des "trucs", des outils pour faire d'autres sciences. "En math, il n'y a rien à comprendre, il suffit d'appliquer "bêtement" !

- **une vision idéaliste** : les maths, langage universel, sont un pur jeu de l'esprit, c'est "la" Rigueur absolue !

Les maths ne s'appuient pas sur la réalité ! Elles n'ont pas besoin des autres sciences !

Hors des maths, ... point de rigueur !

Question aux "idéalistes" :

A trop séparer math et réalité, ne risque-t-on pas :

- *de perdre sens et inspiration ?*
- *de passer à côté d'autres formes de rigueur ?*

Question aux "utilitaristes" :

Peut-on se servir réellement des maths qu'on ne comprend pas suffisamment pour pouvoir les interpréter, les adapter, les modifier ?

Pari fondamental *Si nous acceptons de "pratiquer un certain jeu", nous pouvons malgré nos différences établir un rapport commun vrai aux mathématiques.*

Propositions de base *Faisons des mathématiques ensemble !*

Et ... pour pouvoir "faire des mathématiques" ensemble plutôt que de regarder le professeur en faire,

Apprenons à émettre et à résoudre des conjectures.

Émettre une conjecture,
c'est résumer dans un énoncé précis une idée que l'on pense être universellement vraie.

Par exemple : C1) "L'aire d'un polygone varie dans le même sens que son périmètre".

Résoudre cette conjecture,

c'est se persuader avec des raisons acceptées par tous

- **qu'elle est vraie**

(elle devient alors une propriété, un lemme, un théorème, etc.)

- **ou qu'elle est fausse.**

La conjecture C1 est-elle

Vraie	Fausse	Autre
-------	--------	-------

Découvrir qu'une conjecture est fausse est aussi important que de découvrir qu'une autre est vraie, puisque dans les deux cas c'est se donner un moyen pour savoir si notre façon de penser la situation est adaptée ou non.

Ici, par exemple, on pense que la conjecture C1 est vraie tant qu'on a une conception très étroite des polygones et de la façon de les déformer (agrandissement - réduction type photocopie). Montrer qu'elle est fausse nous oblige à élargir notre conception des polygones (non nécessairement convexes) et notre façon de les déformer (par exemple aplatissage d'un parallélogramme).

Pour cela, lorsqu'une conjecture sera mise à l'étude, vous aurez après réflexion à prendre position en la déclarant :

Vraie ou Fausse ou Autre

(vous expliquerez ultérieurement le sens de votre "Autre").

Contrat didactique

Je vous propose de "faire cours" sous forme de "débat scientifique".

Le but de cette didactique n'est pas de faire croire qu'on peut rapidement tout redécouvrir seul (mystification !) ***mais de vous donner la possibilité***

- ***de faire vôtres les idées d'autrui,***

- ***de "tutoyer" le théorique et l'abstrait au point qu'ils deviennent pour chacun du familier, du "quasi concret"!***

La pratique de l'activité scientifique montre quotidiennement qu'il faut

oser se tromper beaucoup pour ... comprendre un peu !

En référence à l'évidence, deux usages de la logique :

- celui que nous en faisons dans la **vie quotidienne** et qui correspond à certaines exigences,
- celui qui est en vigueur dans la **communauté mathématique** et qui répond à **d'autres exigences.**

Notre travail immédiat : donner un sens précis aux jugements

"c'est vrai!", "c'est faux !" en mathématiques.

En quoi est-ce "la même chose", en quoi cela diffère-t-il des usages quotidiens ?

Validité de ce contrat didactique

Je garantis qu'il y a derrière cette activité d'apparence "simpliste" **des connaissances fondamentales**, mais pour vous les transmettre (dans un vrai bonheur ...) j'ai besoin de votre spontanéité et de votre sincérité.

Vous pouvez, bien entendu, jouer un autre jeu, mais alors je ne peux plus garantir d'apprentissage !.

Deuxième partie

L'activité "Circuit" proprement dite est basée sur une succession de conjectures proposées par le "professeur" à propos d'un circuit électrique, conjectures sur lesquelles chacun doit prendre parti en adoptant une des trois positions Vraie, Fausse ou Autre, puis en expliquant à ses pairs son point de vue de façon à les convaincre d'adopter la même position (tout au moins tant qu'on pense de bonne foi avoir raison). Dans ce débat, le "professeur" donne la parole et résume au tableau, mais en principe (s'il respecte le contrat) il ne prend pas parti et ne laisse pas transparaître son opinion.

Le débat parfois assez vif sur certaines conjectures montre, d'une part, qu'avec les mêmes arguments on peut adopter des positions très différentes ou, inversement, qu'avec des raisons opposées on peut adopter la même position vis-à-vis de la vérité ou de la fausseté d'une assertion générale. **Les conflits tendent à prouver que les consensus larges ne sont pas du ressort de la seule évidence mais sont à construire**, i.e. qu'il faut adopter des conventions, construire des modèles pour pouvoir se mettre "universellement" d'accord.

Les institutionnalisations successives qui ponctuent les débats sur chaque conjecture montrent alors que les conventions des mathématiciens sont dans certains cas en accord et dans d'autres totalement opposées à celles qu'on adopte tacitement dans la vie courante.

Atelier : Sur la rigueur des raisonnements en analyse

Cet atelier consiste dans un premier temps à soumettre à la critique des participants trois mises en équations infinitésimales qui conduisent toutes les trois à des résultats exacts connus.

Pour chaque raisonnement, les participants doivent choisir une des trois positions : OK, 50% , Non.

"OK" signifie qu'on est fondamentalement en accord avec le raisonnement, "50% " signifie oui avec des réserves, et "NON" traduit un rejet profond du raisonnement proposé.

Les deux premières mises en équation qui utilisent les symbolismes classiques dV , dx , le symbole intégrale et les mots magiques limite et infiniment petit, mais ne tiennent aucun compte de la nature des infiniment petits négligés par rapport à ceux retenus dans l'élément infinitésimal, sont en général bien acceptés par la plupart des participants (élèves ou professeurs), alors que la troisième mise en équation qui aborde maladroitement le délicat problème de ce qu'on néglige et de ce qu'on garde en passant à la limite est massivement rejeté. Le "professeur" de l'atelier ne prenant pas parti, les défenseurs de ce point de vue ont beaucoup de mal à se faire entendre et ne provoquent que très peu de changements d'opinion.

Dans un deuxième temps, une quatrième mise en équation, calquée sur les deux premières dans son principe, aboutit maintenant à un résultat spectaculaire : "l'aire latérale du cône est égale à la moitié de l'aire du cylindre droit correspondant !"

Cette mise en équation continue à être majoritairement bien acceptée, même si certains se méfient maintenant du résultat qui ne leur a jamais été enseigné.

Le conflit (socio)cognitif est ici assez violent pour ceux qui doivent au bout d'un moment rendre les armes en constatant qu'avec un raisonnement "fiable", car classique, on arrive à un résultat indéfendable du type $1/2 = 0$. (En pensant à diminuer la hauteur commune du cylindre et du cône, certains montrent alors que l'aire latérale du cylindre tend vers 0, alors que "sa moitié", l'aire latérale du cône, tend vers celle du disque de base !!!)

On espère ici que l'implication de chacun dans le débat va engendrer un choc permettant de pointer que dans nos exigences de rigueur, nous sommes tous (professeurs comme élèves) souvent plus sensibles aux problèmes de forme qu'à celui de savoir si le raisonnement laisse ou non passer des erreurs profondes.

La situation choisie ici montre avec force à quel point on a tendance à préférer les raisonnements de routine un peu lisses qui ne garantissent la validité des résultats que parce qu'on les connaît déjà (i.e. des raisonnements qui ne prouvent rien) plutôt que ceux un peu plus rugueux et maladroits qui pointent les difficultés et nous avertissent qu'on risque de ne pas les avoir surmontées.

Dans cette situation, on travaille donc au corps la rigueur scientifique !

Remarques d'étudiants de DEUG

- Cette année je me rends compte qu'on peut réfléchir en mathématiques.
- J'ai particulièrement apprécié toute la partie du cours portant sur la logique ... je ne comprends pas qu'on ne l'aie jamais enseigné auparavant.
- J'ai découvert qu'on pouvait comprendre les mathématiques.
- Je comprends maintenant que les mathématiques sont une matière à part entière et qu'on peut trouver du plaisir à l'étudier.
- En octobre, math = simple outil inintéressant en lui-même; j'ai découvert des chemins.
- Je m'intéresse vraiment aux mathématiques pour la 1ère année de ma vie.
- Je n'avais jamais considéré le rôle des maths dans la réalité, c'était une science abstraite complètement séparée de la réalité. La modélisation a fait changer mon point de vue.
- Beaucoup d'idées s'éclaircissent quand je rentre chez moi en tram !
- J'ai malheureusement retravaillé les cours et les TD juste avant le partiel ... trop tard.
- Il faut s'investir dans le débat, sinon on risque de s'intéresser plus à la forme qu'au fond.
- Je me dis que je veux prendre la parole, car avant de parler il faut s'obliger à être clair dans sa tête.
- Retravailler le cours chaque week-end est indispensable, sinon c'est un brouillon ; au bout de quelques semaines cela devient incompréhensible.
- J'arrive à m'étonner moi-même !
- En amphi on est catapulté vers un autre univers, on sent la classe et notre personnalité dans une autre dimension.
- Cette nouvelle façon de voir les mathématiques m'a tout simplement émerveillé.
- Je ne fonce plus tête baissée dans les calculs, je me pose des questions avant de commencer à chercher des solutions.
- Le fait de mettre en doute et même de nier des faits que l'on prenait pour des évidences jusqu'alors m'a permis de prendre du recul sur tout ou presque tout, mais en revanche j'ai du mal maintenant à distinguer les vraies évidences au risque peut-être de perdre du temps, ce que je n'aurais pas fait avant.
- Ce sont les questions que je me pose lors du débat scientifique qui m'ont permis d'apprendre ce qui m'était resté inaccessible et surtout ce qui ne va pas dans mes raisonnements.
- Le débat nous permet de comprendre nos erreurs et celles des autres pour les éviter par la suite.

- Les démonstrations m'ont toujours semblé sorties du chapeau d'un prestidigitateur ; la pratique du débat m'a montré qu'on pouvait les construire en réfléchissant avec méthode.
- J'ai l'impression de vraiment comprendre les choses.
- J'avais l'impression que ce débat nous faisait perdre beaucoup de temps et qu'on n'apprenait pas grand-chose ; en fait je me rends compte que j'ai appris beaucoup de choses.
- Les premiers cours qui se sont déroulés sous forme de débat m'ont paru ridicules.
- Cette pratique de débat est assez déroutante, mais il faut la garder; elle est difficile mais elle commence à me plaire.
- Le changement a été très brutal et l'adaptation difficile.
- Je me suis demandé comment avec un cours si brouillon j'arrivais à apprendre quelque chose !
- J'ai l'impression de perdre mon temps.
- Au début je ne participais pas trop, cela me paraissait inintéressant ; depuis, en écoutant je me suis rendu compte que cela pouvait être intéressant, parfois même passionnant.
- Au début j'attendais sans cesse qu'après le débat se déroule un "vrai cours": des définitions et théorèmes....
- Ce qui m'a le plus gêné au début me paraît aujourd'hui le plus intéressant : ne plus penser les maths comme une science finie, ne plus venir en cours apprendre la formule miracle pour faire des calculs impressionnants !
- Je ne voudrais surtout pas qu'on revienne à des mathématiques calculatoires.
- Il faut absolument aller plus vite en gardant le système du débat !
- La pratique du débat ne m'a rien apporté, mais il faut impérativement garder les débats.
- Ça me plaît !
- Il est un peu tard pour proposer une nouvelle méthode de travail, il faudrait le faire depuis la maternelle ou alors le faire plus tôt.
- L'enseignement que je reçois en math me paraît révolutionnaire et m'intéresse beaucoup par rapport à l'enseignement secondaire que j'ai reçu.
- Cette façon de travailler est très instructive, mais il faut jouer le jeu !
- ça va être dur de retrouver un cours conventionnel l'année prochaine.

Remarques d'étudiants en préparation à l'agrégation de mathématiques **après quatre mois de "débat scientifique"**

- Ce que j'apprécie ici et qui manque cruellement à l'enseignement des mathématiques, c'est la créativité, la possibilité qui est donnée à chacun d'être des acteurs et non des spectateurs passifs. ... Dans la plupart des matières, la frontière entre "prof" et "élèves" est tellement bien gardée qu'il n'est plus possible pour l'un comme pour l'autre de pénétrer de l'autre côté.
- Un cours intéressant pour des élèves intéressés ! Comment cela fonctionne-t-il dans une classe genre 4ème, où plein d'élèves ont autre chose à penser, et qui ont des lacunes ?
- Le problème de ce cours est que les notions doivent être déjà connues pour qu'il soit efficace puisqu'il me semble qu'il faut un certain recul... il n'est pas évident à travailler, il y a toujours une différence entre ce qui paraît évident quand quelqu'un explique et ce que l'on comprend lorsqu'on lit ses notes !
- On ne fait pas assez de choses ! Et cependant ... cela permet de bien assimiler et d'approfondir ... cela permet de se poser des questions intéressantes puisqu'on a le droit de poser toutes les questions que l'on veut.
- Si habituellement les questions les plus intéressantes sont posées en interours ou ne sont pas posées, c'est parce qu'on ne sait jamais si sa question est intéressante ou débile ! Si ça a déjà été dit, poser cette question montrerait qu'on n'a rien compris, que l'on n'a pas appris son cours... ici il n'y a pas de honte à ne pas avoir compris ...
- La démarche qui amène l'ensemble des auditeurs à être auteurs et initiateurs de questions à soulever devrait être la forme de communication de tout savoir !

Ce qui conduit à une remise en cause en profondeur du système "éducatif" actuel.

- Je suis vraiment étonnée de la façon dont les gens ont accepté ce cours ... néanmoins quelques sceptiques ont abandonné au départ ... C'est très, trop - par manque d'habitude - fatigant, mais c'est passionnant. Des fois j'aurais envie de revenir à des choses plus simples ou plutôt plus rassurantes... On ne se sent pas du tout fautif d'avoir tort ou raison ...

- J'aime bien ces séances, ce sont les seules où l'on fait des maths.

Ça fait plaisir de voir que tous les profs ne délirent pas complètement vis-à-vis de ce qu'ils enseignent. Délire signifie être enfoncé dans son monde, ou encore ne pas être capable de se rendre compte que, de ce que l'on raconte, ne va rester un an plus tard, au mieux, que des manipulations formelles.

- Cette méthode met en évidence le fait que je sais travailler "bêtement", guidée par les énoncés des professeurs, mais que je suis totalement désemparée lorsque je suis confrontée seule à un problème ou à une notion.

J'ai eu l'impression de faire des découvertes, souvent sur des sujets que j'avais rencontrés mais qui ne m'avaient laissé aucune trace !

Ce cours m'est très utile dans le domaine de mes connaissances mathématiques, mais il m'oblige à remettre en question ma conception de l'enseignement et des mathématiques, et à me remettre en question moi-même !

- Je me suis aperçue - malheureusement assez tard - que ce cours demande un travail énorme à côté pour vraiment "servir", on s'étonne et on comprend pendant le cours, mais on n'assimile vraiment les résultats qu'en les revoyant. Si on a un empêchement de participer au cours, on a vraiment le sentiment de rater quelque chose. Je crois qu'effectivement cela m'apporte beaucoup plus que des concepts mathématiques, aussi une philosophie.

Cette méthode apprend aussi ce que... je crois, on demande à l'oral : réagir vite et précisément sur une question ... elle m'apporte aussi dans mon travail de recherche où j'ai du mal à comprendre ce qu'on attend de moi, et à prendre mon indépendance ... suivre ce cours est structurant ...

- Je me rends compte qu'aucune de mes connaissances antérieures n'est vraiment acquise, que ce n'était que superficiel. Apprendre par cœur des théorèmes et les oublier l'année d'après, c'est ce que j'ai l'impression d'avoir toujours fait ! Car on nous balance le résultat sans nous expliquer pourquoi !

- Au début je me sens plutôt perdue. Mais plus les idées affluent et plus le débat avance, et plus je me sens concernée : je situe le problème, je repère mes lacunes. Mais le "meilleur moment" reste la fin, lorsque tout s'éclaircit, ... j'ai l'impression d'avoir vraiment compris.

- Le débat scientifique, c'est à la fois simple et compliqué ! C'est simple, car quoi de plus naturel qu'une suite de conjectures qui nous amènent à définir de nouveaux objets qui répondent à nos interrogations... c'est la démarche du chercheur... ce qui est compliqué, c'est la mise en pratique !

Quelles réactions des élèves, du corps enseignant ? ... cela suppose que l'enseignant ait parcouru ce long chemin sans fin de la construction des mathématiques... Mais l'essentiel me semble être ceci : des trois fondements de nos démocraties que sont la liberté, l'égalité et la fraternité, c'est bien la troisième qui est la plus oubliée ; ici..., on arrive à lui donner sens.

Bibliographie

- Qu'est-ce que la science ? A.F. Chalmers (Le livre de poche)
- La formation de l'esprit scientifique, G. Bachelard 1938 Paris Vrin.
- Enseigner autrement en DEUG A 1ère année, 1990 (Publications inter - I.R.E.M)
- Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques, S. Johsua et J.J. Dupin, (PUF)
- Débat scientifique en cours de mathématiques M. Legrand, janvier 93, Repères IREM n°10
- Mathématiques, mythe ou réalité : un point de vue éthique sur l'enseignement scientifique, M. Legrand, juillet 95, Repères IREM n°20&21 (Topiques Editions)
- La problématique des situations fondamentales M. Legrand, avril 97, Repères IREM n°27
- La crise de l'enseignement, un problème de qualité, M. Legrand (Aléas Editeur, 15 quai Lassagne, Lyon)
- La transposition didactique, Y. Chevallard (La Pensée sauvage)
- La théorie des situations, G. Brousseau (La Pensée sauvage)