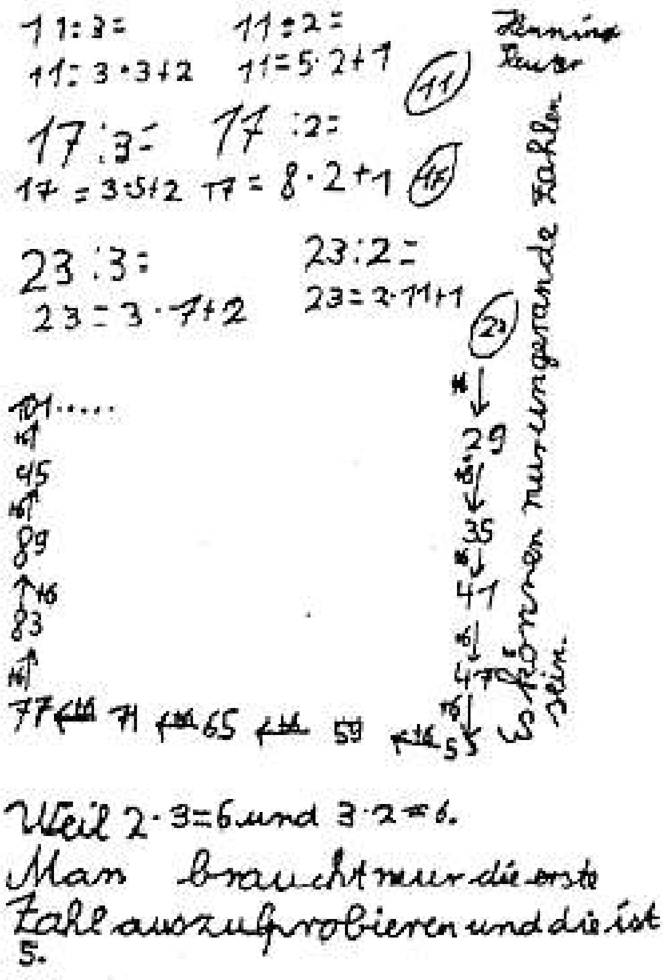
Some examples, French verison

1. OMITTED Reddy's “Squaring a Circle”
2. OMITTED Euclid's Infinity of primes
3. Henning's proof in Wittmann & Müller 1990
4. OMITTED Prototypical textbook proof in Chazan 1993
5. OMITTED Proof that if n^2 is a multiple of 3 then n is (Selden & Selden jrme)
6. Proof that the product of two diagonal matrices is diagonal from Segal, abstruse correct version.
7. Sum of N by MI (Hanna/Knuth)
8. Sum of N by dots (http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/runsums/triNbProof.html)
9. Sum of N by numerical GE even/odd cases method. (DAR)
10. Sum of N by generalised Gauss method. (Hanna/Knuth)
11. Sum of N by numerical GE Gauss method. (DAR)
12. Rephrasing of Euclid (2) in more modern terms, preserving the logical structure. (DAR)
13. Proof that the sum of two even numbers is even (Hoyles Gr 10, algebraic)
14. OMITTED Proof that the sum of two even numbers is even (Hoyles Gr 10, factors)
15. Proof that the sum of two even numbers is even (Hoyles Gr 10, digits sum)
16. Proof that the sum of two even numbers is even (Hoyles Gr 10, dots)
17. OMITTED Proof that the sum of the interior angles of a triangle is 180 degrees (Hoyles Gr10, Tearing corners)
18. Proof that the sum of the interior angles of a triangle is 180 degrees (Hoyles Gr10, turtle geometry)
19. Proof that the sum of the interior angles of a triangle is 180 degrees (Hoyles Gr10, traditional Euclid parallels)
20. Proof that the sum of the interior angles of a triangle is 180 degrees (Hoyles Gr10, tessellation)
21. Proof without words, sum of square numbers (Nelsen)
22. Pythagorean Theorem, Euclid, from http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/propI47.html
23. Pythagorean Theorem,, Behold, from http://www.math.wichita.edu/~richardson/mathematics/pythagoras/behold.html
24. Pythagorean Theorem, Ratio proof, from http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml
25. Pythagorean Theorem, French style proof, from http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml
26. Proof that the square root of 2 is irrational, from Wittman & Muller.
27. Proof that the square root of 5 is irrational, from http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/numbers.shtml#rational
28. Infinitude of primes, from http://www.cut-the-knot.org/proofs/primes.shtml
29. OMITTED Proof that the square root of 2 is irrational, from Tall 1995.
30. Proof that 2x3 is the same as 3x2, from Tall 1995.
31. Proof that (a+b)(a-b)=(a2-b2), from Tall 1995.
32. Proof that in a triangle equal sides implies equal angles, from Tall 1995.
33. Proof Reconstructed figure from Liu Hui's commentary on Jiuzhang Suanshu (adapted from Siu 1993 p. 350)
34. Elements Book I Prop 1 (from Heath 1956 p. 242?)
35. Elements Book I Prop 4 (from Heath 1956 p. 247-8?)
36. OMITTED Elements Book IX Prop. 20 (from Heath 1956 p. 413
37. Proof of the Goldbach conjecture (Smith & Henderson 1959 p. 123)
38. Formal proof adapted from: Monks, Ken, 2002, Introduction to Formal Proofs
39. OMITTED Proof by generic cases (Chazan 1993)
40. OMITTED Proof by exhaustion from Bell, 1976, p. 39-40,
41. Generic example from Harel & Sowder
42. Generic example action proof from Semadeni
43. Behold! (Tall version)
44. OMITTED Proof that the sum of the interior angles of a triangle is 180 degrees
45. Proof of $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ (adapted from Tall 1995 jpsm p. 7)
46. Proof 1 from Barbin et al
47. Proof 2 from Barbin et al
48. Proof 3 from Barbin et al

3

Répondre à la question : Quels sont les nombres dont la division par 2 donne un reste de 1 et ceux dont la division par 3 donne un reste de 2 ? (et démontrer).



[parlé]
Wenn ich nur auf den Rest 1 achte, muss ich immer 2 weitergehen und treffe dann nur ungerade Zahlen. Wenn ich nur auf den Dreierrest achte, muss ich immer 3 weitergehen. Zusammentreffen kann ich nur nach 3 Zweiersprüngen und nach 2 Dreiersprüngen.

[traduction de texte écrit]
Puisque 2x3=6 et 3x2=6 un doivent seulement essayer le premier nombre et cela est 5.
[écrit en longueur] que ce peut seulement être un nombre impair.

[traduction des commentaires parlés]
Si je considère le reste 1, je dois procéder dans les étapes de 2 et je rencontre les nombres impairs. Si je considère le reste de 2, je dois procéder dans les étapes de 3. Les étapes coïncident seulement après 3 deux-étapes et 2 trois-étapes.

6

Démonstration le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale.

When $i \neq j$, $(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik}B_{kj} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \dots + A_{in}B_{nj}$

$= A_{ii}B_{ij}$, as A is diagonal, so $A_{ik} = 0$, when $i \neq k$

$= 0$ as B is diagonal, so $B_{ij} = 0$, as $i \neq j$

7

À démontrer : la somme des *n* premiers nombres entiers positifs est *n*(*n*+1)/2.

Pour n=1 c'est vrai puisque 1 = 1(1+1)/2

Supposons que ce soit vrai pour un certain *k* arbitraire, c.-à-d., *S*(*k*) = *k*(*k*+1)/2.

On considére alors :

$$\begin{aligned} S(k+1) &= S(k) + (k+1) \\ &= k(k+1)/2 + k+1 \\ &= (k+1)(k+2)/2 \end{aligned}$$

Par conséquent la proposition est vraie pour *k*+1 si elle est vraie pour *k*. Par récurrence, la proposition est vraie pour tout *n*.

Prove: The sum of the first *n* positive integers is *n*(*n* + 1)/2.

For $n = 1$ it is true since $1 = 1(1 + 1)/2$.
Assume it is true for some arbitrary k, that is, $S(k) = k(k + 1)/2$. Then consider

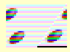
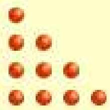
$$\begin{aligned} S(k + 1) &= S(k) + (k + 1) \\ &= k(k + 1)/2 + k + 1 \\ &= (k + 1)(k + 2)/2. \end{aligned}$$

Therefore, the statement is true for $k + 1$ if it is true for k. By induction, the statement is true for all n.

8f

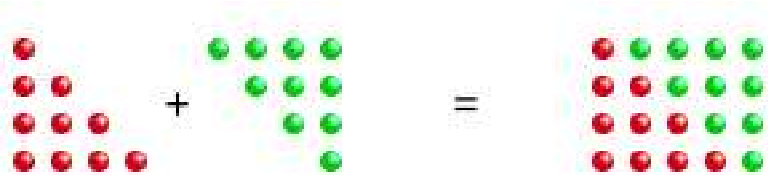
Une preuve visuelle montrer que 1+2+3+... +n = n(n+1)/2

Nous pouvons visualiser la somme 1+2+3+... +n comme triangle des points. Des nombres qui ont une telle configuration des points s'appellent des nombres triangulaire, écrits T(n), la somme des nombres entiers de 1 à n :

n	1	2	3	4	5	6
T(n) comme somme	1	1+2	1+2+3	1+2+3+4	1..5	1..6
T(n) comme triangle					...	
T(n)=	**1**	**3**	**6**	**10**	**15**	**21**

Pour la preuve, nous compterons le nombre de points dans T(*n*) mais, au lieu d'additionner les numéros 1, 2, 3, etc.. jusqu'à *n* nous trouverons le total en utilisant seulement une multiplication et une division !

Pour faire ceci, nous adapterons deux copies d'une triangle des points ensemble, une rouge et une copie à l'envers en vert. Par exemple
T(4)=1+2+3+4



Notez que
- nous obtenons un rectangle qui est a le même nombre de lignes (4) mais avons une colonne supplémentaire (5)
- ainsi le rectangle est 4 par 5
- il contient donc les boules 4x5=20
- mais nous a pris deux copies de T(4) pour obtenir ceci
- ainsi nous devons avoir 20/2 = 10 boules en T(4), que nous pouvons facilement contrôler.

Cette preuve visuelle s'applique à n'importe quelle taille du nombre de triangle.

9

A démontrer : la somme des n premiers nombres entiers positifs est $n(n+1)/2$.

n est impair ou pair.

D'abord, considérez un n impair, par exemple 7. Alors la somme est 1+2+3+4+5+6+7. Vous pouvez réarranger ceci en 3 sommes paires : 1+7, 2+6, 3+5, chacune étant égale à 8, avec les 4. Ainsi la somme est 3x8+4, ou en général : $((n-1)/2)(n+1))+((n+1)/2)$, qui simplifie à $(n(n+1)/2)$.

Ensuite, considérez un n pair, par exemple 8. Alors la somme est 1+2+3+4+5+6+7+8. Vous pouvez réarranger ceci en 4 sommes égales à 9 : 1+8, 2+7, 3+6, 4+5. Ainsi la somme est 4x9, ou en général : $((n/2)(n+1))$, qui simplifie à $(n(n+1)/2)$.

10

A démontrer : la somme des n premiers nombres entiers positifs est $n(n+1)/2$.

Soit $\quad S(n) = 1 + 2 + 3 + ... + n$
puis $\quad S(n) = n + (n-1) + (n-2) + ...+ 1.$

Prenant la somme de ces deux lignes,

$$\begin{aligned} 2S(n) &= (1+n) + (2+ n-1) + (3+ n-2) + ...+ (n+1) \\ &= (n+1) + (n+1) + (n+1) +...+ (n+1) \\ &= n(n+1) \end{aligned}$$

Par conséquent $S(n) = n(n+1)/2$.

Prove: The sum of the first n positive integers is $n(n+1)/2$.

Let $\quad S(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n.$
Then $\quad S(n) = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1.$

Taking the sum of these two rows,

$$\begin{aligned} 2S(n) &= (1+n) + [2+(n-1)] + [3+(n-2)] + \cdots \\ &\qquad + (n+1) \\ &= (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) \\ &= n(n+1). \end{aligned}$$

Therefore, $S(n) = n(n+1)/2$.

11

A démontrer : la somme des *n* premiers nombres entiers positifs est $n(n+1)/2$.

Considérez la somme 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10. Écrivez cette somme, et la ré-écrire à l'inverse, et ajoutez-les :

```
 1+ 2+ 3+ 4+ 5+ 6+ 7+ 8+ 9+10
10+ 9+ 8+ 7+ 6+ 5+ 4+ 3+ 2+ 1
11+11+11+11+11+11+11+11+11+11 = 10 × 11
```

puisque la somme a été ajoutée à elle-même, divisant 10 × 11 par 2 on obtient la somme cherchée.

12

(Preuve qu'il y a un nombre infini de nombres premiers)

Soient A, B, C nombres premiers ; je dis qu'il y a plus de nombres premiers que A, B, C.
Soit D le plus petit multiple commun à A, B, C ; Soit F la somme de D et de l'unité.
Alors F est premier ou non.
1er cas: F est premier ; alors on a trouvé les nombres premiers A, B, C, F qui sont plus que A, B, C.
2eme cas : F n'est pas premier ; donc il est divisible par un certain nombre premier.
Soit G le nombre premier divisant F.
Je dis que G est différent des nombres A, B, C.

Maintenant A, B, C divisant D ; donc G divise D.
Mais il divise également F. Par conséquent G divisera l'unité : ce qui est absurde.
Par conséquent G est différent des nombres A, B, C. Et par hypothèse il est premier.
Par conséquent on a trouvé les nombres premiers A, B, C, G qui sont plus que l'ensemble donné de A, B, C.
C. Q. F. D.

13

Quand vous ajoutez deux chiffres pairs quelconques la somme est toujours un chiffre pair.

a est n'importe quel nombre entier
b est n'importe quel nombre entier
$2a$ et $2b$ sont deux chiffres pairs quelconques
$2a + 2b = 2(a+b)$

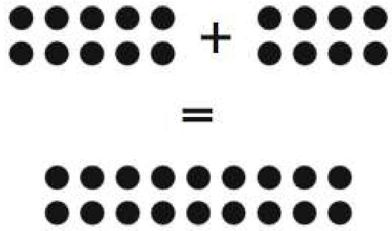
15

Quand vous ajoutez deux chiffres pairs quelconques la somme est toujours un chiffre pair.

Les chiffres pairs se terminent dans 0, 2, 4, 6, ou 8.
Quand vous ajoutez deux de ces chiffres la somme se terminera par 0, 2, 4, 6, ou 8.

16

Quand vous ajoutez deux chiffres pairs quelconques la somme est toujours un chiffre pair.

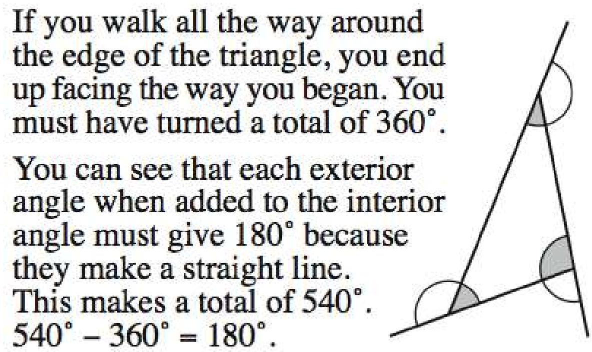


18

Preuve que la somme des angles intérieurs d'une triangle est égal à 180 degrés.

Si vous vous promenez sur le bord de la triangle, vous terminerez face à la même voie où vous avez commencé. Vous devez avoir tourné de 360 degrés.

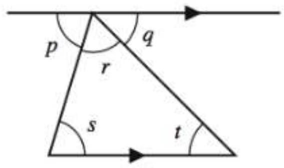
Vous pouvez voir que chaque angle extérieur ajouté à l'angle intérieur doit donner 180 degrés parce qu'ils font une ligne droite. Ceci fait un total de 540 degrés.
540 - 360 = 180.



19

Preuve que la somme des angles intérieurs d'une triangle est égal à 180 degrés.

J'ai tracé une ligne parallèle à la base de la triangle.



Rapports	*Raisons*
$p = s$	Les angles alternatifs entre deux lignes parallèles sont égaux
$q = t$	Les angles alternatifs entre deux lignes parallèles sont égaux
$p + q + r = 180^o$	Angles sur une ligne droite

Donc, $s + t + r = 180^o$

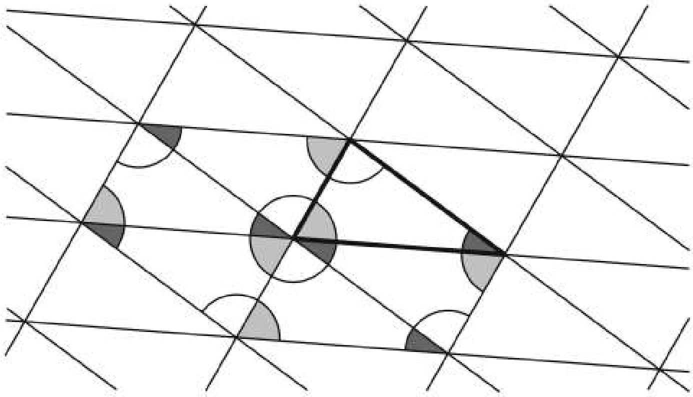
20

Preuve que la somme des angles intérieurs d'une triangle est égal à 180 degrés.

J'ai dessiné un pavage des triangles et ai marqué tous les angles égaux.

Je sais que les angles autour d'un point ajouté donnent 360 degrés.

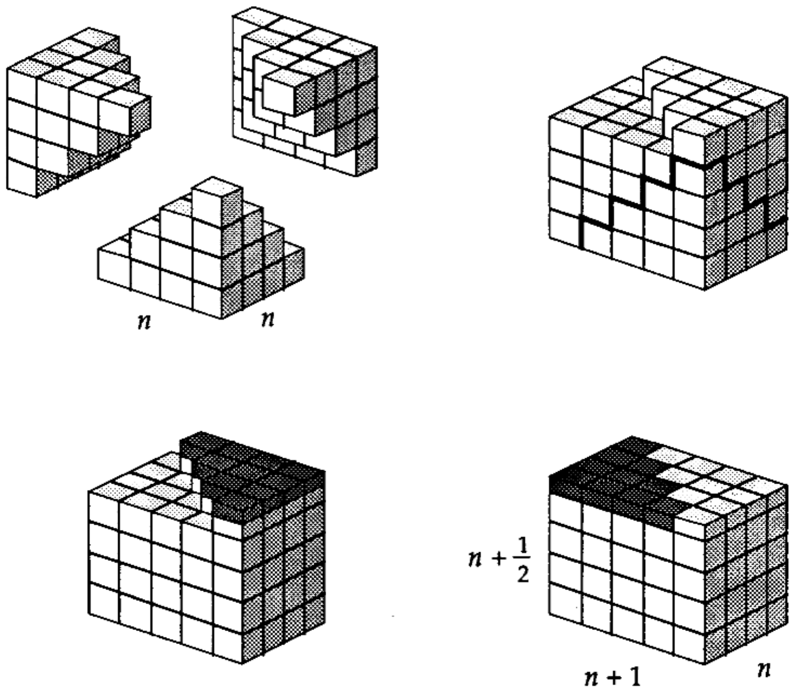
I drew a tessellation of triangles and marked all the equal angles.



I know that the angles round a point add up to 360°.

21

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{3}n(n+1)(n+\tfrac{1}{2})$$

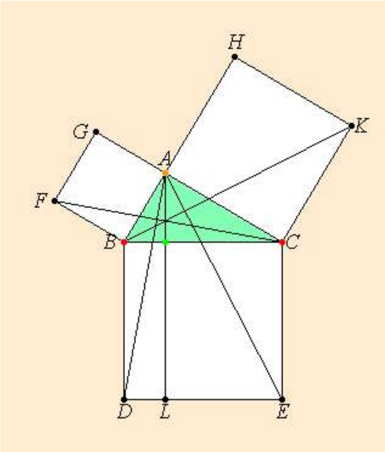


22

In right-angled triangles the square on the side opposite the right angle equals the sum of the squares on the sides containing the right angle.

Let ABC be a right-angled triangle having the angle BAC right.
I say that the square on BC equals the sum of the squares on BA and AC.

Describe the square BDEC on BC, and the squares GB and HC on BA and AC. Draw AL through A parallel to either BD or CE, and join AD and FC.



Since each of the angles BAC and BAG is right, it follows that with a straight line BA, and at the point A on it, the two straight lines AC and AG not lying on the same side make the adjacent angles equal to two right angles, therefore CA is in a straight line with AG.

For the same reason BA is also in a straight line with AH.

Since the angle DBC equals the angle FBA, for each is right, add the angle ABC to each, therefore the whole angle DBA equals the whole angle FBC.

Since DB equals BC, and FB equals BA, the two sides AB and BD equal the two sides FB and BC respectively, and the angle ABD equals the angle FBC, therefore the base AD equals the base FC, and the triangle ABD equals the triangle FBC.

Now the parallelogram BL is double the triangle ABD, for they have the same base BD and are in the same parallels BD and AL. And the square GB is double the triangle FBC, for they again have the same base FB and are in the same parallels FB and GC.

Therefore the parallelogram BL also equals the square GB.

Similarly, if AE and BK are joined, the parallelogram CL can also be proved equal to the square HC. Therefore the whole square BDEC equals the sum of the two squares GB and HC.

And the square BDEC is described on BC, and the squares GB and HC on BA and AC.

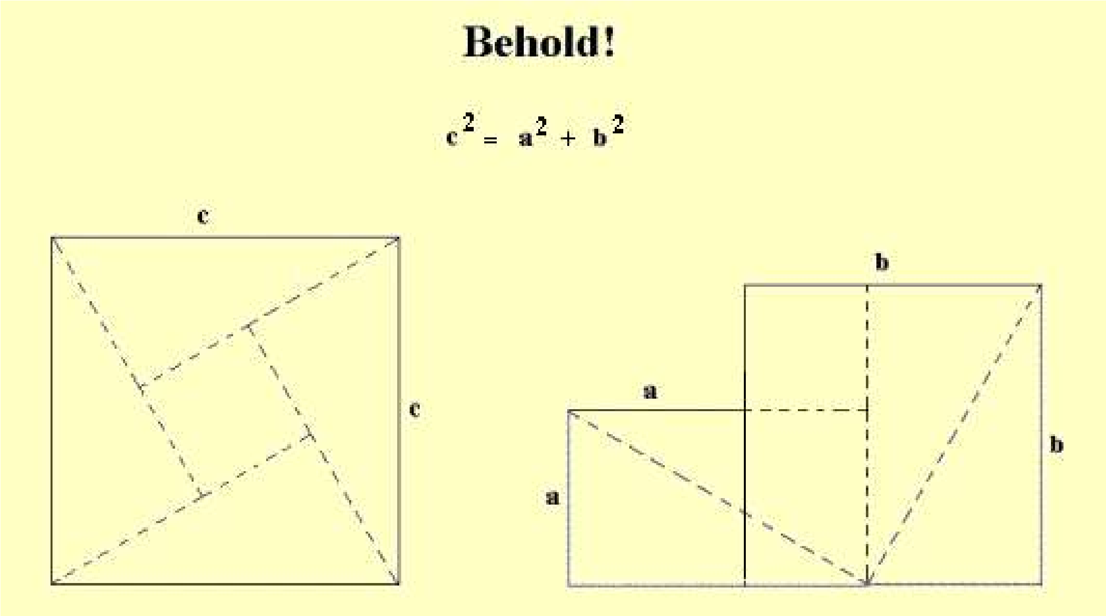
Therefore the square on BC equals the sum of the squares on BA and AC.

Therefore in right-angled triangles the square on the side opposite the right angle equals the sum of the squares on the sides containing the right angle..

Q.E.D.

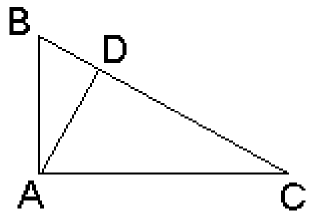
23

Regardez!



24

Preuve du théorème de Pythagore



Nous commençons par le triangle ABC, et construisons la hauteur AD. Les triangles ABC, ADR et CDA sont semblables d'où les rapports:

AB/BC = BD/AB et AC/BC = DC/AC.

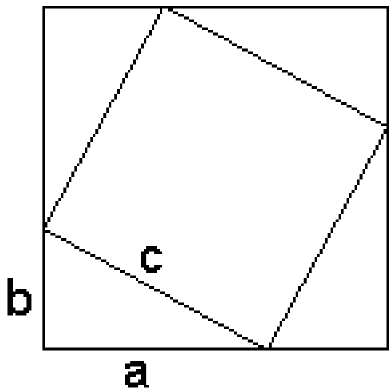
On obtient alors:

AB·AB = BD·BC et AC·AC = DC·BC

En ajoutant, nous obtenons:

AB·AB + AC·AC = BD·BC + DC·BC = (BD+DC)·BC = BC·BC.

25



Preuve du théorème de Pythagore

Formez un carré avec le côté (a+b) et un trou avec le côté c.

Nous pouvons calculer la surface du grand carré de deux façons.

Ainsi

$(a + b)^2 = 4 \cdot ab/2 + c^2$

En simplifiant nous obtenons l'identité nécessaire.

26

La racine carrée de 2 est irrationnelle

Soient a, b $\in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux et tels que $(a/b)^2 = 2$.
On a alors $a^2 = 2b^2$ et donc b^2 est un diviseur commun à a^2 et b^2.
Comme a et b sont premiers entre eux, a^2 et b^2 le sont aussi.
Par conséquent $b^2 = 1$ et ainsi $a^2 = 2$, qui est impossible pour $a \in \mathbb{N}^*$.

27

La racine carrée de 5 est irrationnelle

Supposez qu'un nombre rationnelle r existe tel que $r^2 = 5$.
Dans l'écriture $r=p/q$ on suppose p et q premiers entre eux, c.-à-d. n'ont aucun diviseur commun.
La fraction p/q dans ce cas-c'est dite irréductible.

Ainsi $5q^2 = p^2$ de sorte que p^2 soit divisible par 5. 5 est un nombre premier (il n'a aucun autre diviseur que lui-même et 1).
Par conséquent, puisque 5 est un facteur de p^2 il divise également p, c.-à-d. $p = 5s$.
Substituant ceci dans $5q^2 = p^2$ et se divisant par 5 donne $q^2 = 5s^2$.
Du même coup, q est alors divisible par 5 qui rend la fraction p/q réductible.
Contradiction.

28

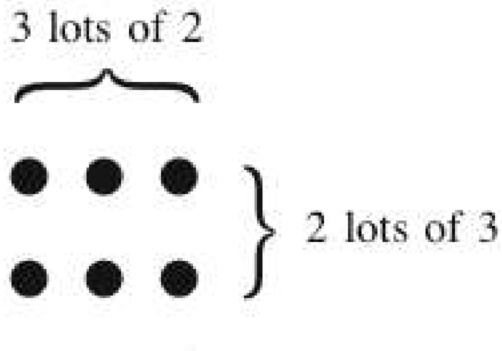
Preuve qu'il y a un nombre infini de nombres premiers

Supposons qu'il y ait seulement un nombre fini de nombres premiers : $p_1,p_2,...,p_n$. Nous pouvons alors former un nombre $M = p_1p_2...p_n$ égal au produit de tous les nombres premiers existants. M est clairement divisible par n'importe lequel de ces nombres premiers existants p_i.

Soit N = M + 1. Les diviseurs de N ne sont pas parmi les diviseurs de M. Considérez les facteurs premiers du nombre N. De la discussion précédente aucun d'eux ne peut coïncider avec n'importe lequel de $p_1,p_2,...,p_n$. Que ceci contredit la supposition que le nombre de nombres premiers est fini.

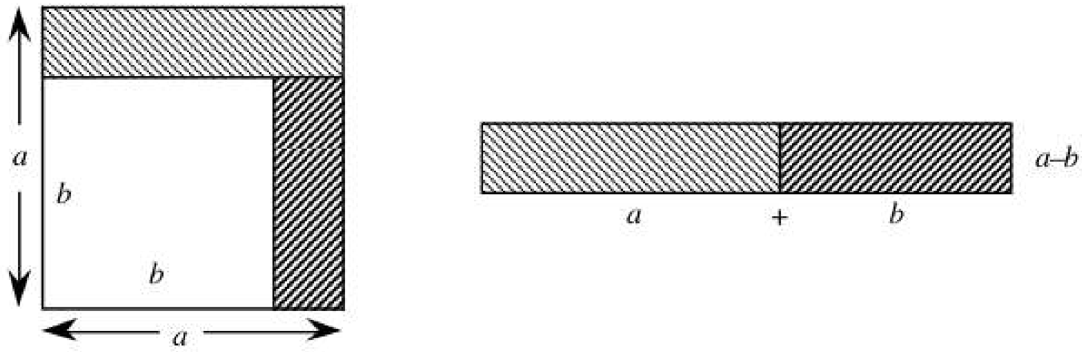
30

Une preuve que 3×2 est identique que 2×3



31

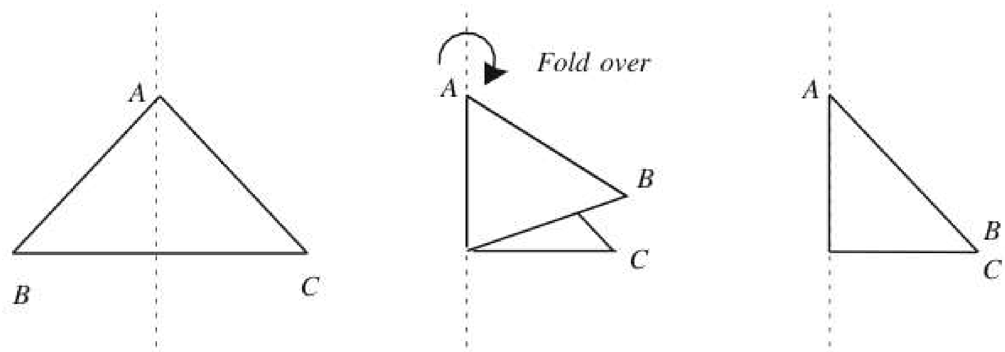
Une preuve que: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$



Taking a square side *b* from a square side *a* and rearranging what is left as (a–b)×(a+b)

32

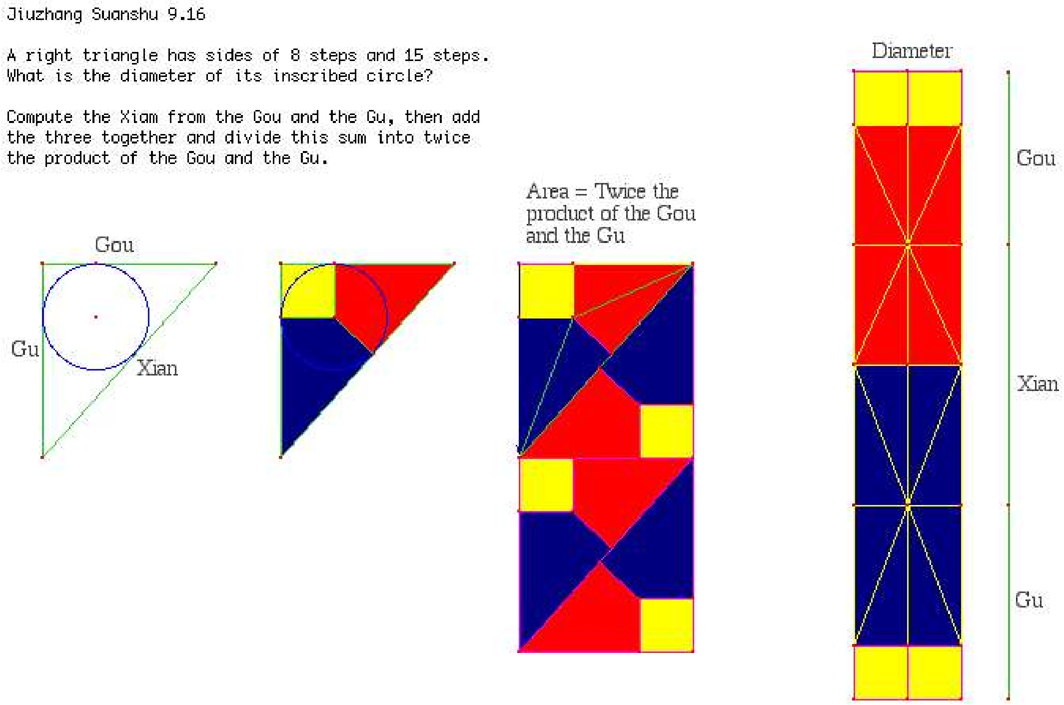
Une preuve que les côtés égaux implique des angles égaux



proof that equal sides imply equal angles

33

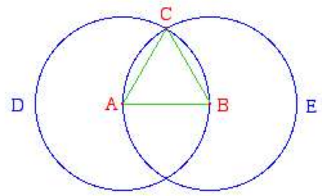
Une preuve qui si un cercle est inscrit dans une triangle rectangle, son diamètre est 2ab/(a+b+c)



34

Proposition 1. Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral.

Exposition. Soit AB une droite donnée et finie.
Détermination. Il faut construire sur la droite finie AB un triangle équilatéral.
Construction. Du centre A et de l'intervalle AB, décrivons la circonférence BCD (dem. 3); et de plus, du centre B et de l'intervalle BA, décrivons la circonférence ACE; et du point C, où les circonférences se coupent mutuellement, conduisons aux points A, B les droites CA, CB (dem. 1).



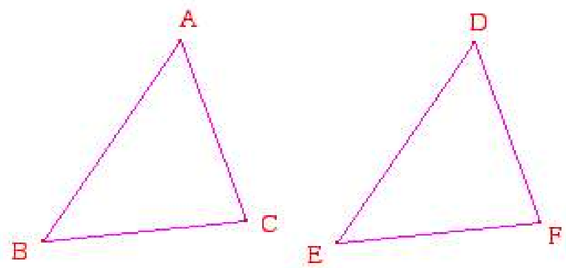
Démonstration. Car, puisque le point A est le centre du cercle BCD, la droite AC est égale à la droite AB (déf. 15); de plus, puisque le point B est le centre du cercle ACE, la droite BC est égale à la droite BA; mais on a démontré que la droite CA était égale à la droite AB; donc chacune des droites CA, CB est égale à la droite AB; or, les grandeurs qui sont égales à une même grandeur, sont égales entre elles (not. 1); donc la droite CA est égale à la droite CB; donc les trois droites CA, AB, BC sont égales entre elles.
Conclusion. Donc le triangle ABC (déf. 24) est équilatéral, et il est construit sur la droite donnée et finie AB. Ce qu'il fallait faire. [...]

35

Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si les angles compris par les côtés égaux sont égaux, ces triangles auront leurs bases égales, ils seront égaux, et les angles restants, soutendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun.

Soient les deux triangles ABC, DEF; que ces deux triangles aient les deux côtés AB, AC égaux aux deux côtés DE, DF, chacun à chacun, le côté AB égal au côté DE, et le côté AC au côté DE, et qu'ils aient aussi l'angle BAC égal à l'angle EDF;
je dis que la base BC est égale à la base EF, que le triangle ABC est égal au triangle DEF et que les angles restants, sous-tendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun; l'angle ABC égal à l'angle DEF, et l'angle ACB égal à l'angle DFE.

Car le triangle ABC étant appliqué sur le triangle DEF, le point A étant posé sur le point D, et la droite AB sur la droite DE, le point B s'appliquera sur le point E, parce que AB est égal à DE; mais AB étant appliqué sur DE, 1a droite AC s'appliquera sur DE, parce que l'angle BAC est égal à l'angle EDF;
donc le point C s'appliquera sur le point F, parce que AC est égal à DE;
mais le point B s'applique sur le point E;
donc la base BC s'appliquera sur la base EF;



car si le point B s'appliquant sur le point E, et le point C sur le point E, la base BC ne s'appliquait pas sur la base EF, deux droites comprendraient un espace, ce qui est impossible (dém. 6);
donc la base BC s'appliquera sur la base EF, et lui sera égale;
donc le triangle entier ABC s'appliquera sur le triangle entier DEF, et lui sera égal;
et les angles restants s'appliqueront sur les angles restants, et leur seront égaux, l'angle ABC à l'angle DEF, et l'angle ACB à l'angle DFE.

Donc, si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si les angles compris par les côtés égaux sont égaux, ces triangles auront leurs bases égales, ils seront égaux, et les angles restants, sous-tendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun. Ce qu'il fallait démontrer.

37

Comme récréation mathématique, un professeur de lycée a demandé à sa classe s'ils pourraient trouver un rapport entre les chiffres pairs plus grands que 4 et les sommes de deux nombres premiers impaire. Voici certaines des relations que ces élèves ont découvertes :

6 = 3 + 3	16 = 3 + 13 = 5 + 11
8 = 3 + 5	18 = 5 + 13 = 7 + 11
10 = 3 + 7 = 5 + 5	20 = 3 + 17 = 7 + 13
12 = 5 + 7	....
14 = 3 + 11 = 7 + 7	30 = 7 + 23 = 11 + 19 = 13 + 17

Après avoir travaillé un moment sur ce problème, un jeune a hurlé, "Ceci pourrait continuer pour toujours. Il n'y a aucune fin à ces relations!"

38

Axiome 1: **OX**
Axiome 2: **XO**

Règle: Pour toutes chaînes de caractères *w* et *v*, ***wv*** et ***vw*** ⇒ ***w***

Théorème : **X**

Preuve:

1.	**OX**	(par Axiome 1)
2.	**XO**	(par Axiome 2)
3.	**X**	(par Règle appliqué à #2 et # 1)

41

Montrer que "si un nombre entier est divisible par 9, alors la somme de ses chiffres est divisible par 9," prenons un nombre, par exemple 867. Ce nombre peut être décomposé en $8 \times 100 + 6 \times 10 + 7$, soit $(8 \times 99 + 6 \times 9) + (8 + 6 + 7)$.
Le premier somme, $8 \times 99 + 6 \times 9$, est certainement divisible par 9, le deuxième, $8 + 6 + 7$, qui est la somme des chiffres du nombre, doit être divisible par 9.

42

La proposition à démontrer est que le produit ne dépend pas de l'ordre des facteurs qui le composent.

Nous choisissons une paire de nombres, par exemple, 3 et 5. Nous devons montrer que $3 \times 5 = 5 \times 3$. Comme représentation du produit $n \times m$ nous choisissons n lignes de m galets chacun. Ainsi nous commençons l'action en arrangeant les galets comme sur le figure 1. Nous les séparons horizontalement (le figure 2) et cela implique que le nombre de galets est 3×5. Alors nous les séparons verticalement (le figure 3) et obtenons 5×3. Le nombre de galets sur le figure 1 doit être indépendant de la manière de compter. Par conséquent $3 \times 5 = 5 \times 3$.

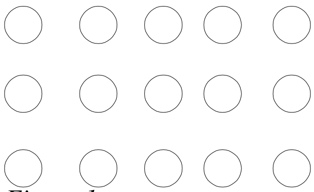


Figure 1

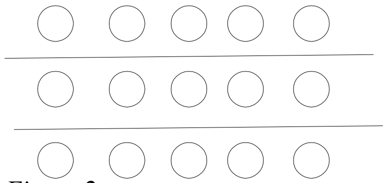


Figure 2

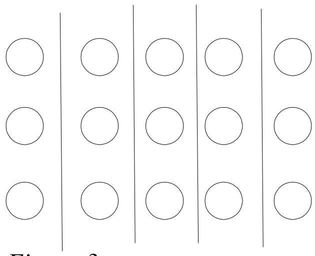
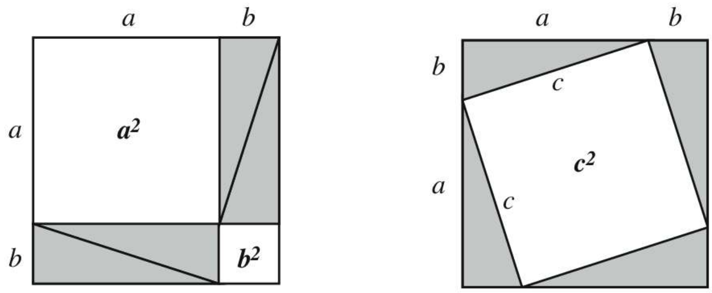


Figure 3

43

Preuve du théorème de Pythagore



45

L'identité algébrique $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ peut être prouvée par manipulation algébrique :

$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &= a^2 - ab + ba - b^2 \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

47

Lorsqu'on joint deux sommets opposés d'un parallélogramme aux points milieux de deux côtés opposés de la figure, une des diagonales du parallélogramme se trouve divisée en trois parties égales.

1ère Démonstration

En effet, AF, CG, BO sont les médianes du triangle ACB ; donc

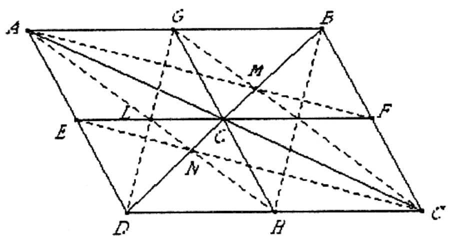
$$BM = \frac{2}{3} BO \quad (\text{n° } 447)$$

ou

$$BM = \frac{2}{3} \times \frac{BD}{2} = \frac{BD}{3}$$

de même

$$DN = \frac{BD}{3} \text{ ; donc } \ldots$$



447 : Les trois médianes d'un triangle se rencontrent en un même point, et ce point est situé aux $\frac{2}{3}$ de chaque médiane en partant des sommets.

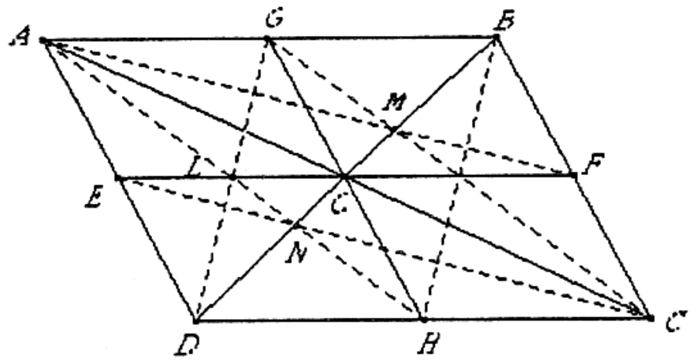
48

Lorsqu'on joint deux sommets opposés d'un parallélogramme aux points milieux de deux côtés opposés de la figure, une des diagonales du parallélogramme se trouve divisée en trois parties égales.

2ème Démonstration

Considérons le triangle AOB.

La droite AF, diagonale du parallélogramme ABFE, passe par le point milieu de OG ; or on sait que la droite AM, qui passe par le milieu de la médiane OG du triangle AOB, détermine sur la base OB un segment OM qui est la moitié de BM (n° 435) ; donc BM est le tiers de BD.



435 : La droite ALN, qui joint un sommet d'un triangle ADB au point milieu L d'une des médianes des autres sommets, divise le côté BD opposé au sommet considéré en deux parties, dont l'une est double de l'autre.

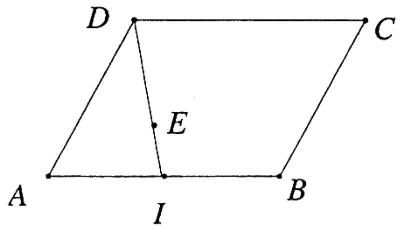
49

Lorsqu'on joint deux sommets opposés d'un parallélogramme aux points milieux de deux côtés opposés de la figure, une des diagonales du parallélogramme se trouve divisée en trois parties égales.

DEUXIÈME EXTRAIT (OUVRAGE SCOLAIRE CONTEMPORAIN) [9]

Un problème d'alignement

Soit un parallélogramme ABCD, I le milieu de [AB] et E le point du segment [ID] tel que IE = $\frac{1}{3}$ ID. Établir que les points A, E et C sont alignés et préciser la position de E sur [AC].



[...]

Une solution rédigée

Nous avons $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (ABCD est un parallélogramme).

Or $\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{AI}$ (I est le milieu de [AB]) et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID}$ (Chasles).

Ainsi $\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AI} + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID})$, soit $\boldsymbol{\overrightarrow{AC} = 3\,\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID}}$ **(1)**.

• D'autre part, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE}$ (Chasles) et $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$ (par hypothèse).

Donc $\boldsymbol{\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}}$ **(2).**

• Les relations (1) et (2) rendent visible que $\boldsymbol{\overrightarrow{AC} = 3\,\overrightarrow{AE}}$ ce qui prouve l'alignement de A, E et C et précise la position de E : **E est le point de [AC] tel que AC = 3 AE.**

46

91

Feel free to write a proof of your own here.