La signification d'un mot est son utilisation en langage

La signification de « preuve » dans la recherche en didactique de mathématiques

The meaning of a word is its use in language

The meaning of "proof" in mathematics education research

David A Reid (Acadia University, Canada)

11 mars 2005

Institut d'Informatique et Mathématiques Appliquées de Grenoble

La signification d'un mot est son utilisation en langage

Une preuve est ce que vous m'avez observé faire au tableau trois fois par semaine pendant trois ans ! Voila ce qu'est une preuve.

« A proof is what you’ve been watching me do at the board three times a week for three years! That’s what a proof is. »

– Davis & Hersh: “Mathématicien Idéal”

- One research study (Maher and Martino 1996 p. 195) reported a fifth grader's elegant proof by cases…. Proof by contradiction is also possible with young children. (NCTM 2000 p.59)

- The majority of the [high attaining 14 and 15 year old] students were unable to construct valid proofs in [the domain of number and algebra]. (Healy & Hoyles 2000 p. 425)

Les élèves aux États Unis peuvent prouver mais en Angleterre les élèves ne peuvent pas ?

Ou peut-être que Maher et Hoyles ont des significations différentes pour «proof» ?

Preuve et Démonstration

=

???

Preuve et Démonstration

=

Proof and Mathematical Proof

Preuve et Démonstration

=

Proof and Mathematical Proof

Proof Scheme and Proof

Preuve et Démonstration

=

Proof and Mathematical Proof

Proof Scheme and Proof

Demonstration and Proof

Godino and Recio (1997)

- « preuve » et « prouver » signifient différentes choses dans différents domaines d'explication.

  Ces significations peuvent être différenciées au travers de ces dimensions :
  - le statut de **vérité** des théorèmes,
  - la source de **validité** des preuves,
  - les genres de **raisonnement** utilisés,
  - le degré de **formalité** du langage utilisé,
  - l'**objectif** de l'action de prouver

Godino and Recio (1997)
La logique

- **Vérité** : Les preuves donnent à des théorèmes une validité universelle et intemporelle
- **Validité** : Elles se reposent sur la validité des règles de logique utilisées
- **Raisonnement** : Nécessairement déductif
- **Formalité** : L'utilisation des langages formels est exigée
- **Objectif** : Prouver est une méthode d'aborder le problème théorique de l'organisation et de la structuration du système de la connaissance mathématique

Godino and Recio (1997)
Les mathématiques traditionnelles

- **Vérité** : Les théorèmes n'ont pas le caractère des vérités absolues et nécessaires
- **Validité** : La validité des preuves est jugée par les juges qualifiés (Hersh 1993 p. 389)
- **Raisonnement** : Les preuves sont déductives ...
- **Formalité** : ... mais non formelles
- **Objectif** : Prouver est une méthode pour résoudre de nouveaux problèmes, pour augmenter le corps de la connaissance, et, secondairement, pour l'organiser et pour fonder le système entier des mathématiques

Douek (1998)

- « preuve formelle » preuve réduite au calcul logique,
- « preuve mathématique » les preuves produites par les mathématiciens traditionnels,
- « prouver » le processus de construction d'une preuve

Reid (2001)

« preuve » et « prouver » dans la recherche en didactiques de mathématiques, peuvent se rapporter au(x):

- Concept(s) de la preuve,
- Preuves en tant que textes écrits,
- Raisonnement déductif,
- Testant la vérité d'un énoncé (non connu comme étant vrai à l'avance),
- Établissant la vérité d'un énoncé (pour un public qui doute)

Balacheff (2002)

- My claim is that our epistemology of proof is the first deadlock to figure out and to cope with, when entering our research field. One may easily agree that this is especially crucial for young researchers, who generally enter the field with a naïve or intuitive *problématique*. My claim is that this is a deadlock for the whole field. Unless we have clarified precisely what this deadlock is like and how it limits our capacity to share research outcomes, it will be hardly possible to make significant progress in the field.

Balacheff (2002)

Whether we consider mathematical proof as

- a universal and exemplary type of proof [Fawcett]
- or being first of an idiosyncratic nature [Harel and Sowder],
- at the core of mathematics [Healy and Hoyles]
- or a tool needed by mathematics [Hanna and Jahnke],
- getting its meaning from applications [Hanna and Jahnke]
- or being specific to mathematics as an autonomous field [Mariotti],

makes a big difference.

Balacheff (2002)

These views witness radically different epistemologies of mathematical proof, they correspond to very different understandings of mathematical proof in a teaching-learning perspective and hence they will determine the choice of very different research programmes, research design and, above all, radically different understanding of what students could produce.

Balacheff (2002)

Research frameworks make clear and apparently exclusive choices, either focussing on textual aspects [Duval] or interpersonal aspects [Burton and Morgan]. This has a consequence on the results drawn from these researches indeed and the related statements about teaching they suggest.

Mais n'y a-t-il pas une définition?

Balacheff (2002) affirme,

“almost all researchers will agree on a more or less formal definition of mathematical proof” (p. 1)

presque tous les chercheurs s'accordent sur une définition plus ou moins formelle de la démonstration

Mais n'y a-t-il pas une définition?

Beaucoup d'articles de recherches contiennent des définitions comme celle-ci :

“a finite number of logical steps from what is known to a conclusion using accepted rules of inference.” (Hanna and Barbeau, p. 38)

un nombre fini d'étapes logiques à partir de ce qui est connu vers une conclusion en utilisant des règles d'inférence connues.

Le mathématicien idéal définit la preuve

MI: Ce que vous faites, c'est de transcrire les axiomes de votre théorie dans un langage formel avec une liste donnée de symboles ou « alphabet ». Alors vous transcrivez l'hypothèse dans le même symbolisme. Ensuite vous montrez que vous pouvez transformer l'hypothèse pas à pas, en utilisant les règles de la logique, jusqu'à ce que vous obteniez la conclusion. C'est une preuve.

Le mathématicien idéal définit la preuve

Étudiant : Vraiment ? C'est étonnant ! J'ai appris le calcul élémentaire et avancé, l'algèbre traditionnel, et la topologie, et je n'ai jamais vu cela.

MI: Ah, naturellement personne ne le fait jamais vraiment. Cela durerait toujours !

Mais n'y a-t-il pas une définition?

Oui, mais personne ne la suit
(excepté des logiciens)






Langstaff

Catégorie: Oiseau

Bon exemple

Rouge-gorge familier

Mauvais exemple

Lièvre

Catégorie: Oiseau

Bon exemple

Rouge-gorge familier

- vole,
- pond des oeufs,
- a des plumes,
- a un bec dur,

- peut marcher,
- ne nage pas

Catégorie: Oiseau

Mauvais exemple

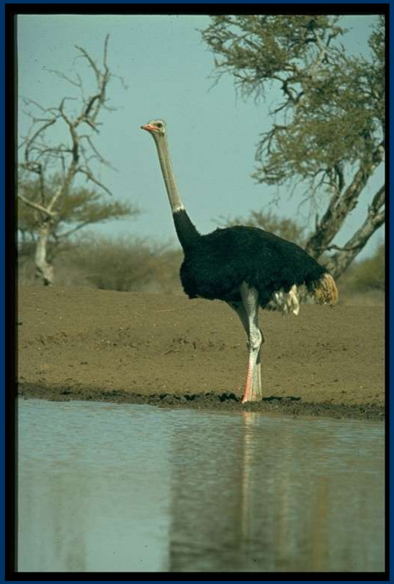
- ne vole pas,
- ne pond pas des oeufs,
- n'a pas des plumes,
- n'a pas un bec dur,

- peut marcher,
- ne nage pas

Lièvre

Catégorie: Oiseau

Exemple intermédiaire



Autruche

- ne vole pas,
- pond des oeufs,
- a des plumes,
- a un bec dur,

- peut marcher,
- ne nage pas

Catégorie: Oiseau

Exemple intermédiaire

Pingouin

- ne vole pas,
- pond des oeufs,
- a des plumes,
- a un bec dur,

- peut marcher,
- nage

Catégorie: Oiseau

Exemple intermédiaire

Ornithorynque

- ne vole pas,
- pond des oeufs,
- n'a pas des plumes,
- a un bec dur,

- peut marcher,
- nage

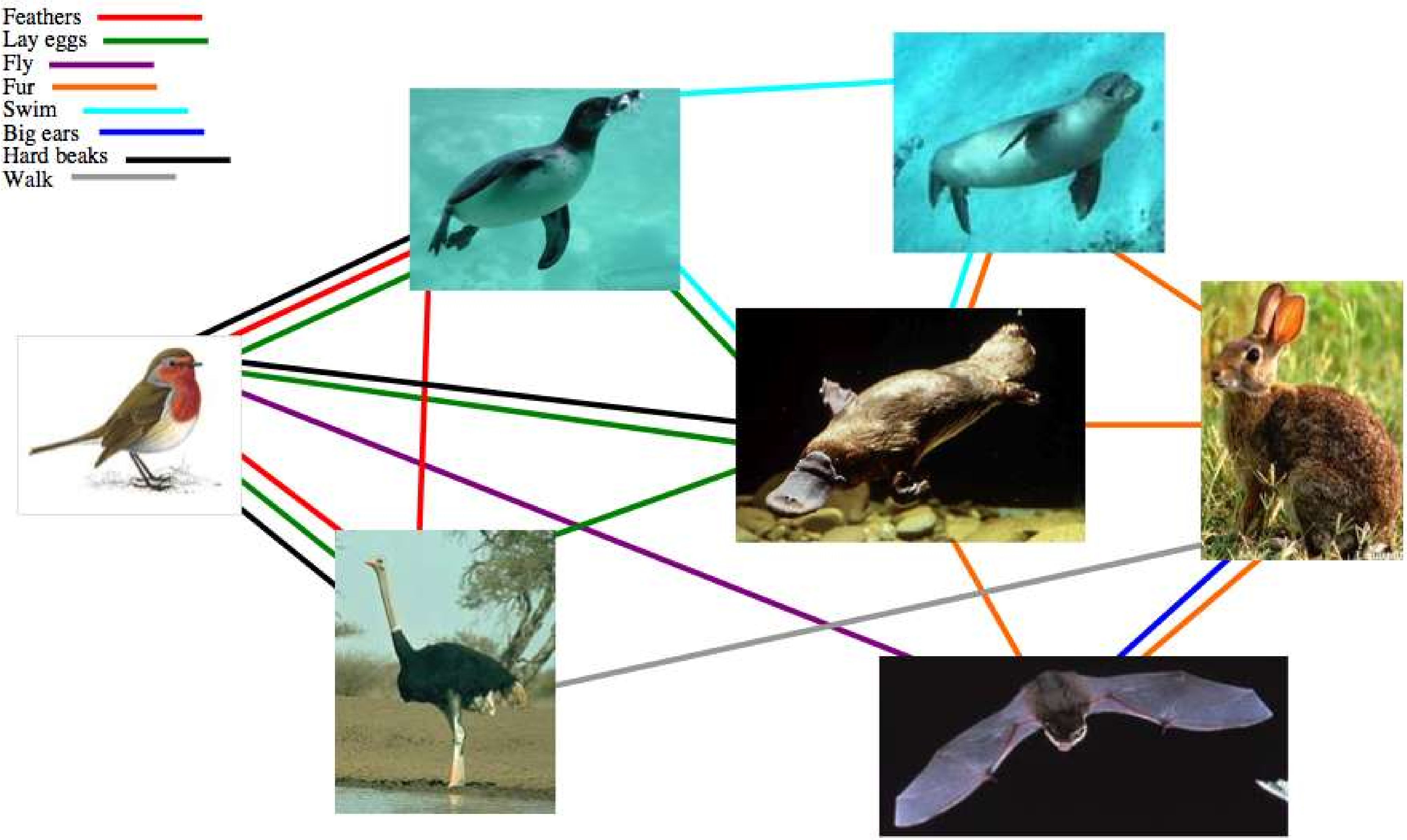
Catégorie: Oiseau

Exemple intermédiaire

Chauve-souris

- vole,
- ne pond pas des oeufs,
- n'a pas des plumes,
- n'a pas un bec dur,

- peut marcher,
- ne nage pas


Feathers
Lay eggs
Fly
Fur
Swim
Big ears
Hard beaks
Walk

Les prototypes peuvent être différents

- Le Bon Exemple:Portrait D'Alexandre Iolas, 1953
- Le musée de Grenoble (emprunté au Centre Georges Pompidou)

Tâche 1

On vous fournira plusieurs preuves

Évaluez chaque preuve en fonction de la façon dont vous pensez qu'elle est un bon exemple de « preuve » :

- **Rouge-gorge**: Un excellent exemple dans tout contexte
- **Autriche**: Un bon exemple dans la plupart des contextes
- **Pingouin**: Un exemple possible dans quelques contextes
- **Ornithorynque**: Pas une preuve, mais il possède beaucoup de caractéristiques d'une preuve
- **Chauve-souris**: Pas une preuve, mais il possède certaines caractéristiques d'une preuve
- **Lièvre**: Pas une preuve en aucune façon

Tâche 2

Notez :

- caractéristiques essentielles d'une preuve (toutes les preuves ont ces caractéristiques)
- caractéristiques normales d'une preuve (les preuves prototypiques ont ces caractéristiques)
- caractéristiques souhaitables d'une preuve (les preuves idéales ont ces caractéristiques)

basé sur les exemples que vous avez classés par catégorie.

Duval sur le différence entre démonstration et argumentation

47

Lorsqu'on joint deux sommets opposés d'un parallélogramme aux points milieux de deux côtés opposés de la figure, une des diagonales du parallélogramme se trouve divisée en trois parties égales.

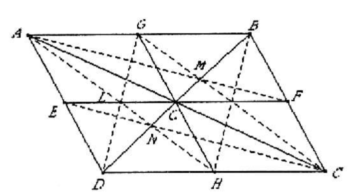
1ère Démonstration

En effet, AF, CG, BO sont les médianes du triangle ACB ; donc

$$BM = \frac{2}{3} BO \quad (\text{n° } 447)$$

ou $$BM = \frac{2}{3} \times \frac{BD}{2} = \frac{BD}{3}$$

de même $$DN = \frac{BD}{3} \text{ ; donc } \ldots$$



447 : Les trois médianes d'un triangle se rencontrent en un même point, et ce point est situé aux $\frac{2}{3}$ de chaque médiane en partant des sommets.

- On peut y reconnaître l'organisation ternaire d'un pas de déduction ... Mais on peut tout aussi bien lire ce texte comme s'il s'agissait d'une argumentation. ... Il n'y a pas à choisir entre ces deux lectures ... Le choix de l'une dépend de l'entrée du lecteur et surtout du fait qu'il soit ou non parvenu au stade de prise de conscience de la différence de fonctionnement entre un raisonnement déductif valide et une argumentation.

Duval sur le différence entre démonstration et argumentation

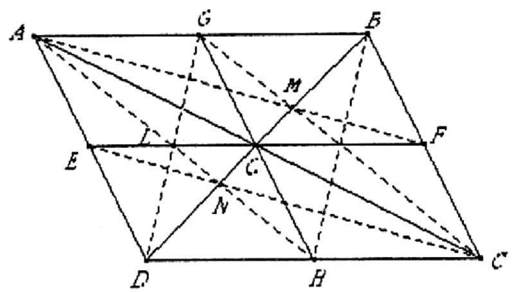
48

Lorsqu'on joint deux sommets opposés d'un parallélogramme aux points milieux de deux côtés opposés de la figure, une des diagonales du parallélogramme se trouve divisée en trois parties égales.

2ème Démonstration

Considérons le triangle AOB.

La droite AF, diagonale du parallélogramme ABFE, passe par le point milieu de OG ; or on sait que la droite AM, qui passe par le milieu de la médiane OG du triangle AOB, détermine sur la base OB un segment OM qui est la moitié de BM (n° 435) ; donc BM est le tiers de BD.



435 : La droite ALN, qui joint un sommet d'un triangle ADB au point milieu L d'une des médianes des autres sommets, divise le côté BD opposé au sommet considéré en deux parties, dont l'une est double de l'autre.

- Cette démonstration, comme le premier pas de la démonstration précédente, donne lieu à une double lecture, l'une déductive prenant en compte les statuts ... et l'autre argumentative centrée sur le contenu.

Duval sur le différence entre démonstration et argumentation

- Duval nous donne une définition précise de démonstration, qui nous permet de distinguer la démonstration de l'argumentation.

- Mais, quand la question est: « Est-ce que c'est une démonstration ou une argumentation? » dans ces cas, la réponse est: « La démonstration est dans l'oeil de celui qui regarde. »